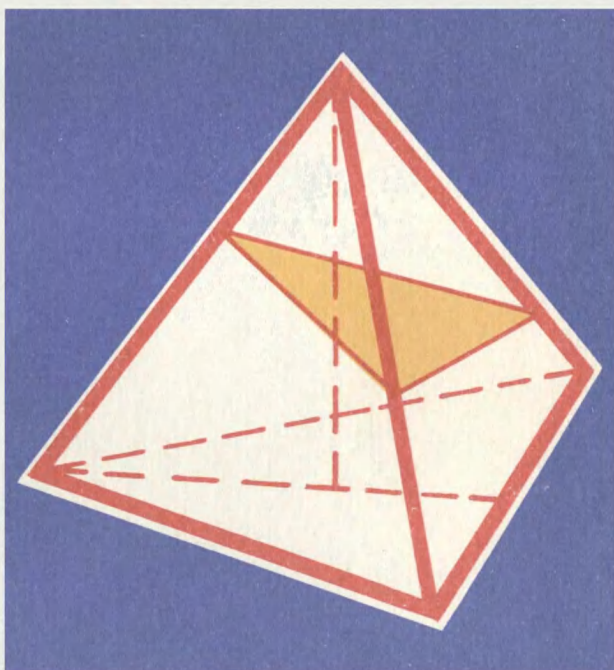




**БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •**  
**выпуск 61**

**М. Б. БАЛК**  
**В. Г. БОЛТЯНСКИЙ**

# **ГЕОМЕТРИЯ МАСС**



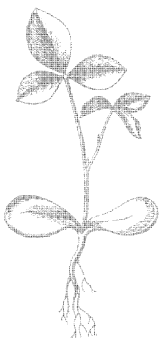


**БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •**  
**выпуск 61**

---

**М. Б. БАЛК  
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ**

# **ГЕОМЕТРИЯ МАСС**



**МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1987**

ББК 22.151.0  
Б20  
УДК 514(023)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Академик Ю. А. Осипьян (председатель), академик А. Н. Колмогоров (заместитель председателя), кандидат физ.-мат. наук А. И. Буздин (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР А. А. Абрикосов, академик А. С. Боровик-Романов, академик Б. К. Вайнштейн, заслуженный учитель РСФСР Б. В. Воздвиженский, академик В. Л. Гинзбург, академик Ю. В. Гуляев, академик А. П. Ершов, профессор С. П. Капица, академик А. Б. Мигдал, академик С. П. Новиков, академик АПН СССР В. Г. Разумовский, академик Р. З. Сагдеев, профессор Я. А. Смородинский, академик С. Л. Соболев, член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев

Ответственный редактор выпуска Ф. Х. Цельман

Балк М. Б., Болтянский В. Г.

Б20 Геометрия масс.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 160 с.— (Б-чка «Квант». Вып. 61.)  
30 к., 145 000 экз.

Великий древнегреческий мыслитель Архимед открыл оригинальный способ доказательства геометрических теорем, основанный на рассмотрении центра масс системы материальных точек. Именно таким способом им впервые была доказана теорема о пересечении медиан треугольника. Метод Архимеда был развит выдающимися математиками прошлого столетия (Лагранж, Якоби, Мёбиус и др.) и превратился в эффективное и строго обоснованное средство геометрического исследования. На примере трех сотен задач в книге показаны возможности применения метода «геометрии масс»

Для школьников и преподавателей

Б  $\frac{1702040000 - 093}{053(01)-87}$  161-87

ББК 22.151.0

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие	4
<b>Глава I. Понятие центра масс и первые его применения к геометрическим задачам</b>	7
§ 1. Наглядное введение	7
§ 2. Математическое определение центра масс	10
§ 3. Решение геометрических задач барицентрическим методом	17
§ 4. Сокращенная запись барицентрического решения	23
<b>Глава II. Идея отрицательных и комплексных масс</b>	31
§ 5. Отрицательные массы	31
§ 6. Теоремы Чебы и Менелая	39
§ 7. Координаты центра масс. Теоремы Гюльдена и неравенство Чебышева	44
§ 8. Комплексные массы	55
<b>Глава III. Момент инерции</b>	65
§ 9. Формулы Лагранжа и Якоби. Применения к геометрии	65
§ 10. Применение понятия момента инерции к доказательству неравенств	73
<b>Глава IV. Барицентрические координаты</b>	76
§ 11. Барицентрические координаты на плоскости	76
§ 12. Барицентрические координаты как площади	84
§ 13. Уравнения линий в барицентрических координатах	100
§ 14. Барицентрические координаты в пространстве	110
§ 15. Барицентрические координаты в многомерных пространствах	116
<b>Глава V. Барицентрические модели в различных областях знания</b>	129
§ 16. Применения к химии и металлургии	129
§ 17. Колориметрия	132
§ 18. Подразделения полиэдров	140
§ 19. Барицентрические координаты в теории интерполяции	148
§ 20. Интерпретация закона Харди — Вайнберга	152

Родоначальником метода, о котором пойдет речь в этой книге, был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в. до н. э. он обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств *центра масс*. В частности, этим способом им была установлена теорема о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Соображения Архимеда были позднее использованы и развиты многими геометрами (Папп, Чева, Гюльден, Люилье и др.).

Несколько простых свойств центра масс позволяют решать различные задачи геометрии и алгебры. В частности, таким путем удастся ответить на вопросы о том, пересекаются ли несколько прямых в одной точке, принадлежат ли несколько точек одной прямой (или одной плоскости) и т. п. Эффективны барицентрические <sup>1)</sup> соображения при доказательстве неравенств и решении разнообразных задач.

Нередко приходится слышать, что рассуждения с использованием свойства центров масс не могут дать математически строгих решений геометрических задач (хотя, может быть, и полезны для угадывания правдоподобных ответов к этим задачам). Однако такое мнение глубоко ошибочно. Понятия механики не только служат ценным эвристическим средством; облеченные в строгую математическую форму, они позволяют получать математически безупречные решения задач геометрии и алгебры.

Идея барицентрического подхода раскрывается в гл. I предлагаемой книги. Сущность его состоит в том, что наше внимание концентрируется на определенных точках — центрах масс каких-то систем материальных точек, связанных с рассматриваемой геометрической задачей. Из механических соображений эти точки появляются совершенно естественно.

---

<sup>1)</sup> Приставка «бари» означает тяжелый (от греческого βαρίс); поэтому «барицентр» означает *центр тяжести (центр масс)*.

Геометрически же целесообразность рассмотрения именно этих точек заранее неясна; и вдруг чудесным образом оказывается, что их использование позволяет быстро найти (и строго обосновать) решение трудной геометрической задачи.

В механических задачах рассматриваются материальные точки с положительными массами. Тел с отрицательными массами, которые под воздействием притяжения Земли «падали» бы не вниз, а вверх, никто не наблюдал. Однако для решения геометрических задач целесообразно распространить понятие центра масс на случай материальных точек и с отрицательными массами. Это сделано в гл. II. Здесь же (по-видимому, впервые в научной и популярной литературе) иллюстрируется возможность применения в геометрии таких «монстров», как материальные точки с комплексными массами.

Через два тысячелетия после того времени, когда жил и работал гениальный Архимед, другой гениальный математик Леонард Эйлер (швейцарец по происхождению, проживший почти полжизни в России и считавший ее своей второй родиной) в связи с изучением вращательного движения тел ввел понятие *момента инерции*. И снова, как и в случае центра масс, нашлись удивительные пути доказательства трудных и интересных геометрических фактов с помощью этого понятия. И поскольку свойства момента инерции (в частности, формулы Лагранжа и Якоби) тесно связаны со свойствами центра масс, мы также рассматриваем их (вместе с геометрическими приложениями) в этой книге — в гл. III.

Идеи Архимеда живут, развиваются, обогащаются новым содержанием. В прошлом столетии замечательный немецкий математик Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868), известный своими работами в области теории чисел, топологии, геометрии, подметил, что барицентрические решения геометрических задач приводят к введению очень интересной системы координат, не похожей ни на декартову, ни на полярную систему, но очень богатую геометрическими приложениями<sup>1)</sup>. С рассмотрением барицентрических координат связана гл. IV предлагаемой книги, где демонстрируются возможности их применения.

Наконец, последняя гл. V книги посвящена разнообразным приложениям *барицентрического метода*. Здесь вы найдете применение изложенных в книге идей к вопросам химии,

---

<sup>1)</sup> В своей монографии «Барицентрическое исчисление» (1827) Мёбиус сумел с помощью введенных им координат изложить проективную геометрию.

проблемам цветового зрения, задачам популяционной генетики, топологии, вычислительной математики.

В книге теоретический материал занимает немного места: небольшое число несложно доказываемых основных теорем и поясняющих соображений — вот и все, к чему сводится математическое изложение теоретических основ барицентрического метода. Основной же объем книги занимают примеры и задачи. Примеры (приведенные с подробным решением) предназначены для того, чтобы проиллюстрировать, как работает метод; их в книге более пятидесяти. Кроме того, в книге содержится свыше 250 задач; некоторые из них имеют характер несложных упражнений, предназначенных для усвоения формулировок теорем, другие содержат больше трудностей, но и гораздо интереснее геометрически, а некоторые являются «крепкими орешками», «раскусив» которые вы получите удовольствие от познания геометрического содержания.

Книга доступна учащимся старших классов, интересующимся математикой. Правда, в некоторых местах используются комплексные числа, многомерные пространства и другие сведения, несколько выходящие за рамки школьной программы, однако эти вопросы рассматриваются в тематике факультативных и кружковых занятий.

Авторы будут признательны читателям за замечания по содержанию книги, характеру изложения и подбору задач.

*М. Б. Балк*

*В. Г. Болтянский*

## ПОНЯТИЕ ЦЕНТРА МАСС И ПЕРВЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

«...Я счел нужным написать тебе и... изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем».

*Архимед. Послание к Эратосфену  
«О механических теоремах»*

В этой главе приводится чисто математическое определение понятия центра масс и устанавливаются (с помощью векторов) основные его свойства. Это позволяет по-новому изложить решения многих геометрических задач, причем эти решения проводятся на языке механики и являются математически строгими.

### § 1. Наглядное введение

В физике под материальной точкой понимают тело, размерами которого можно пренебречь при сравнении их с расстояниями до других тел, рассматриваемых в задаче. Для упрощения рассуждений такое «малое» тело рассматривают как геометрическую точку (т. е. считают, что вся масса тела сосредоточена в одной точке). Если в точке  $A$  сосредоточена масса  $m$ , то будем эту материальную точку обозначать через  $mA$ , т. е. будем записывать материальную точку в виде «произведения».

Рассмотрим два небольших шарика, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных жестким «невесомым» стержнем. На этом стержне имеется такая замечательная точка  $Z$ , что если подвесить всю систему в этой точке, то она будет в равновесии — ни один из шариков не «перетянет». Эта точка  $Z$  и есть центр масс двух рассматриваемых материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ .

Такая же картина наблюдается и для большего числа материальных точек. Представим себе, что в некоторой области пространства (например, внутри некоторого куба) находятся  $n$  массивных шариков с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Размеры шариков предполагаем малыми (по сравнению с наименьшим из расстояний между ними). Иначе говоря, речь идет



об  $n$  материальных точках

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n. \quad (1)$$

Будем полагать, что вся рассматриваемая область заполнена веществом пренебрежимо малой массы по сравнению с массой каждого шарика (пенопласт); мы полагаем, что этот пенопласт не гнется, не сжимается, не растягивается. Материальные точки (1) «сидят» в нем неподвижно, как изюминки в застывшем тесте. Можно представлять себе картину и иначе: рассматриваемые шарики соединены «невесомыми» стержнями в одну жесткую систему. Если выбрать произвольную точку одного из соединяющих стержней и подвесить всю систему на ниточке, закрепленной в этой точке, то рассматриваемая система, вообще говоря, не окажется в состоянии равновесия, одна часть «перетянет».

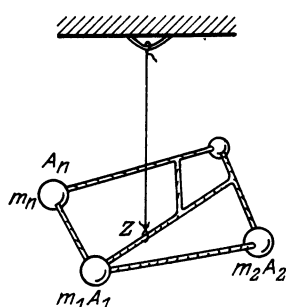


Рис. 1.

Но есть такая замечательная точка  $Z$ , что если мы подвесим всю систему на вертикальной ниточке, прикрепленной в точке  $Z$  (считая, что один из стержней проходит через эту точку, рис. 1), а затем как угодно повернем систему вокруг точки  $Z$ , успокоим и отпустим, то она останется в равновесии. Такую точку  $Z$  называют *центром масс*, или *барицентром* системы материальных точек (1).

При применении этого понятия к решению геометрических задач используются следующие интуитивно ясные и имеющие простой механический смысл свойства центра масс.

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный.

2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение (рис. 2)

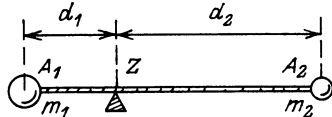


Рис. 2.

определяется архимедовым правилом рычага (или, как его еще называют, «золотым правилом механики»): произведение массы материальной точки на расстояние от нее до центра масс одинаково для обеих точек, т. е.

$m_1 d_1 = m_2 d_2$ , где  $m_1, m_2$  — массы материальных точек, а  $d_1, d_2$  — соответствующие плечи, т. е. расстояния от материальных точек до центра масс.

3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы всех отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс всей системы не изменится.

Вот и вся теория. Как видите, речь идет об очень простых фактах из области механики. Разумеется, сформулированные свойства 1, 2, 3 должны быть обоснованы (и это будет аккуратно сделано в § 2). Но сейчас мы хотим проиллюстрировать то, что, несмотря на простоту этих фактов, они, тем не менее, представляют собой мощное средство доказательства теорем и решения геометрических задач.

**Пример 1.** Докажем теорему Архимеда: три медианы треугольника имеют общую точку, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

**Решение** (предложенное Архимедом). Пусть  $ABC$  (рис. 3) — данный треугольник;  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — его медианы. Загрузим

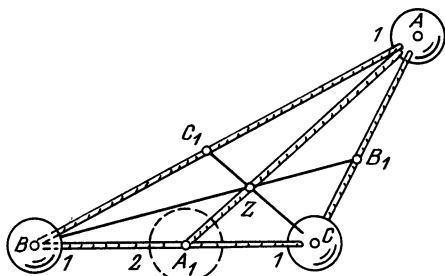


Рис. 3.

вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равными массами, — скажем, по 1 грамму. Получающаяся система трех материальных точек  $1A$ ,  $1B$ ,  $1C$  имеет однозначно определенный центр масс  $Z$  (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек  $1B$  и  $1C$  мы перенесем в их центр масс, т. е. (согласно свойству 2) в точку  $A_1$ . Но тогда  $Z$  окажется центром масс лишь двух материальных точек  $2A_1$  и  $1A$ . Значит,  $Z \in [AA_1]$ . Аналогично убедимся, что  $Z \in [BB_1]$  и  $Z \in [CC_1]$ . Таким образом, все три медианы имеют общую точку  $Z$ . Кроме того, по правилу рычага (свойство 2) имеем  $2|ZA_1| = 1|ZA|$ , или  $|ZA| : |ZA_1| = 2 : 1$ .

#### Задачи

1. Каждая вершина тетраэдра  $ABCD$  (не обязательно правильного) соединена отрезком с точкой пересечения медиан противоположащей ей грани (всего получается четыре отрезка); далее, каждая

середина ребра соединена отрезком с серединой противоположного ребра (три отрезка). Имеют ли эти семь отрезков общую точку?

2. Через середину медианы  $AA_1$  и через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая. В каком отношении делит она сторону  $AC$ ?

## § 2. Математическое определение центра масс

Для того чтобы с помощью понятия центра масс получать математически корректные решения геометрических задач, непригодно определение центра масс с помощью «подвешивания на ниточке». И хотя эту физическую картину мы можем постоянно иметь в нашем воображении, следует разъяснить точный математический смысл понятия центра масс с помощью геометрических терминов. Иначе говоря, следует произвести *математизацию* изложенной в предыдущем параграфе наглядной картины.

Выражение «материальная точка  $mA$ » будет означать: «Точка  $A$  вместе с числом  $m$ , которое ей сопоставлено». Число  $m$  будем называть *массой* материальной точки  $mA$ ; в этой главе всегда будет предполагаться, что  $m > 0$ . Ради краткости вместо слов «материальная точка» будем часто писать м. т.

Проведем теперь предварительное эвристическое рассмотрение для того чтобы на основе тех свойств, которые были сформулированы в предыдущем параграфе, выяснить, как может выглядеть математическое определение центра масс. Рассмотрим сначала две м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$ , и пусть  $Z$  — их центр масс (свойство 1). Равенство  $m_1d_1 = m_2d_2$  (свойство 2) можно записать в виде  $m_1|\vec{ZA}_1| = m_2|\vec{ZA}_2|$  (рис. 2), т. е.  $|m_1\vec{ZA}_1| = |m_2\vec{ZA}_2|$ . Учитывая, что векторы  $\vec{ZA}_1$  и  $\vec{ZA}_2$  имеют противоположные направления, получаем отсюда  $m_1\vec{ZA}_1 = -m_2\vec{ZA}_2$ , т. е.

$$m_1\vec{ZA}_1 + m_2\vec{ZA}_2 = \vec{0}. \quad (2)$$

Итак, если мы хотим, чтобы выполнялись свойства 1 и 2, то центром масс двух м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  должна быть такая точка  $Z$ , для которой справедливо равенство (2).

Пусть теперь даны три м. т.  $m_1A_1$ ,  $m_2A_2$ ,  $m_3A_3$ , и пусть  $Z$  — центр масс этой системы м. т. (свойство 1). Обозначим через  $C$  центр масс системы двух м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$ . Тогда, согласно (2),

$$m_1\vec{CA}_1 + m_2\vec{CA}_2 = \vec{0}. \quad (3)$$

Далее, согласно свойству 3, центр масс всей системы  $m_1A_1$ ,  $m_2A_2$ ,  $m_3A_3$  совпадает (рис. 4) с центром масс совокупности

двух м. т.  $(m_1 + m_2)C$  и  $m_3A_3$ , т. е. (согласно (2))

$$(m_1 + m_2)\vec{ZC} + m_3\vec{ZA_3} = \vec{0}. \quad (4)$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\vec{ZC} &= \\ &= m_1\vec{ZC} + m_2\vec{ZC} = m_1(\vec{ZA_1} - \vec{CA_1}) + m_2(\vec{ZA_2} - \vec{CA_2}) = \\ &= m_1\vec{ZA_1} + m_2\vec{ZA_2} - (m_1\vec{CA_1} + m_2\vec{CA_2}) = m_1\vec{ZA_1} + m_2\vec{ZA_2} \end{aligned}$$

(см. равенство (3)), и потому равенство (4) принимает вид

$$m_1\vec{ZA_1} + m_2\vec{ZA_2} + m_3\vec{ZA_3} = \vec{0}. \quad (5)$$

Итак, если мы хотим, чтобы выполнялось также свойство 3, то центром масс трех м. т.  $m_1A_1$ ,  $m_2A_2$ ,  $m_3A_3$  должна быть такая точка  $Z$ ; что справедливо равенство (5).

Можно было бы аналогично рассмотреть случай четырех и более м. т., но равенства (2) и (5) делают закономерность уже совершенно понятной. Итак, в соответствии с приведенным эвристическим разбором мы принимаем следующее основное

**О п р е д е л е н и е.** Центром масс (или барицентром) системы материальных точек

$$m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n \quad (6)$$

называется точка  $Z$ , для которой имеет место равенство

$$m_1\vec{ZA_1} + m_2\vec{ZA_2} + \dots + m_n\vec{ZA_n} = \vec{0}. \quad (7)$$

Разумеется, предыдущие рассуждения нельзя рассматривать как доказательство равенства (7) — эти рассуждения имели лишь наводящий характер, а равенство (7) является определением, и потому «доказывать» его справедливость бессмысленно. Напротив, исходя из определения (7), мы теперь строго докажем, что центр масс системы м. т. действительно обладает свойствами 1–3, указанными в предыдущем параграфе. Этим и будет осуществлено чисто математическое (не связанное с физическими представлениями) введение понятия центра масс и обоснование его свойств.

Вместо слов «центр масс системы м. т.» (6) говорят также «центр масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , помещенных соответственно в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ».

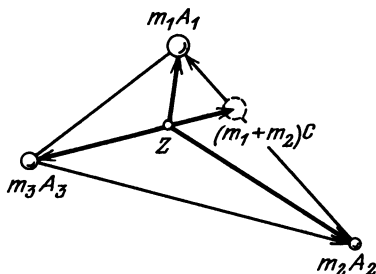


Рис. 4.

Центр равных масс, помещенных в вершинах многоугольника (или многогранника), принято называть *центроидом* этого многоугольника (или многогранника). В частности, по теореме Архимеда точка пересечения медиан треугольника является его центроидом.

**Теорема 1.** А) Если точка  $Z$  служит центром масс системы материальных точек (6), то при любом выборе в пространстве точки  $O$  справедливо равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (8)$$

Б) Обратно: если хотя бы при одном выборе в пространстве точки  $O$  верно равенство (8), то точка  $Z$  — центр масс системы (6).

**Доказательство.** Ограничимся случаем  $n = 2$  (при  $n > 2$  доказательство аналогично).

А) Выберем произвольно точку  $O$ . Равенство

$$m_1 \overrightarrow{ZA_1} + m_2 \overrightarrow{ZA_2} = \vec{0}$$

можно переписать так:

$$m_1 (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OZ}) + m_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OZ}) = \vec{0},$$

откуда и вытекает требуемое равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}.$$

Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем утверждение Б).

**Следствие 1.** Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет однозначно определенный центр масс (т. е. справедливо свойство 1, указанное в § 1).

В самом деле, выберем произвольную точку  $O$ . Тогда положение точки  $Z$  однозначно определяется формулой (8).

Докажем теперь, что из определения центра масс (см. (7)) вытекает также справедливость свойства 2, рассмотренного в предыдущем параграфе.

**Теорема 2.** Центр масс двух м. т. расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение (рис. 2) определяется архимедовым правилом рычага:  $m_1 d_1 = m_2 d_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $Z$  — центр масс системы двух м. т.  $m_1 A_1$  и  $m_2 A_2$ . Тогда (см. (7))

$$m_1 \overrightarrow{ZA_1} + m_2 \overrightarrow{ZA_2} = \vec{0},$$

т. е.  $m_1 \overrightarrow{ZA_1} = -m_2 \overrightarrow{ZA_2}$ . Из этого видно, что векторы  $\overrightarrow{ZA_1}$  и  $\overrightarrow{ZA_2}$  противоположно направлены, так что точка  $Z$  лежит внутри

отрезка  $A_1A_2$ , причем  $m_1 |\vec{ZA}_1| = m_2 |\vec{ZA}_2|$ , т. е.  $m_1 d_1 = m_2 d_2$ . Это и есть «архимедово правило рычага»; из него видно, что центр масс двух м. т. ближе к «более массивной» из них, т. е. к той, у которой масса больше (рис. 2).

Наконец, докажем справедливость рассмотренного в предыдущем параграфе свойства 3.

**Теорема 3.** Пусть в системе (6), состоящей из  $n$  м. т., отмечены  $k$  м. т.  $m_1A_1, \dots, m_kA_k$  (рис. 5) и пусть  $C$  — центр масс отмеченных м. т. Если всю массу отмеченных м. т. сосредоточить в их центре масс  $C$ , то от этого положение центра масс всей системы не изменится. Иначе говоря, система (6) имеет тот же центр масс, что и система м. т.  $(m_1 + \dots + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $Z$  — центр масс системы (6), т. е. (см. (7))

$$m_1 \vec{ZA}_1 + \dots + m_k \vec{ZA}_k + m_{k+1} \vec{ZA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{ZA}_n = \vec{0}.$$

Так как  $C$  — центр масс системы м. т.  $m_1A_1, \dots, m_kA_k$ , то по теореме 1

$$\vec{ZC} = \frac{m_1 \vec{ZA}_1 + \dots + m_k \vec{ZA}_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

(это равенство получается из (8), если  $O, Z, n$  заменить на  $Z, C, k$ ). Из написанных двух равенств следует, что

$$(m_1 + \dots + m_k) \vec{ZC} + m_{k+1} \vec{ZA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{ZA}_n = \vec{0},$$

а это и значит, что центром масс системы м. т.  $(m_1 + \dots + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$  является та же точка  $Z$ .

Доказанная теорема позволяет в ряде случаев видоизменить систему м. т., сохраняя положение центра масс всей системы. Например, если в исходную систему (6) входят две м. т. равной массы, расположенные в точках  $A$  и  $B$ , то от замены этих двух м. т. одной м. т. удвоенной массы, помещенной в середине отрезка  $AB$ , положение центра масс всей системы (6) не изменится. Именно таким путем была в § 1 доказана теорема Архимеда о пересечении медиан треугольника.

С теоремой 3 связаны следующие простые замечания, которые часто позволяют сделать более краткими решения задач.

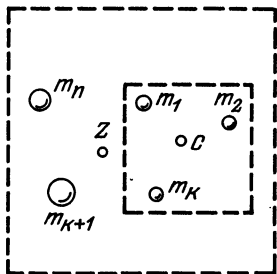


Рис. 5.

**Замечание 1.** Пусть  $Z$  (рис. 6) — центр трех масс, помещенных в вершинах треугольника  $ABC$ . Тогда прямая  $AZ$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A'$ , являющейся центром тех двух масс, которые помещены в концах этой стороны  $BC$ .

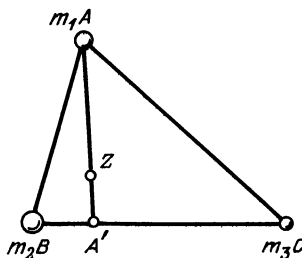


Рис. 6.

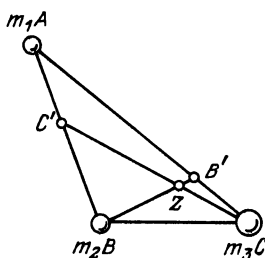


Рис. 7.

**Замечание 2.** Пусть в вершинах  $A, B, C$  некоторого треугольника (рис. 7) помещены массы  $m_1, m_2, m_3$ ; пусть  $B'$  — центр масс м. т.  $m_1A$  и  $m_3C$ , а  $C'$  — центр масс м. т.  $m_1A$  и  $m_2B$ . Тогда точка  $Z$  пересечения прямых  $BB'$  и  $CC'$  есть центр всех трех масс, помещенных в вершинах треугольника.

Доказанными теоремами 1–3 завершается математическое введение понятия центра масс и доказательство основных его свойств. В дальнейшем из этих основных свойств будет выведен ряд других теорем о центрах масс.

### Задачи

3. В вершинах  $A, B, C, D$  параллелограмма  $ABCD$  помещены соответственно массы  $p, q, p, q$ . Докажите, что центром этих масс служит центр параллелограмма.

4. В вершинах параллелограмма  $ABCD$  расположены такие массы  $m_A, m_B, m_C, m_D$ , что центр масс получающихся четырех м. т. совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что  $m_A = m_C$  и  $m_B = m_D$ .

5. Докажите, что положение центра масс системы м. т. не изменится, если все массы этих м. т. увеличить в одно и то же число раз.

6. Докажите, что если суммарная масса  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  системы (6) равна 1 (в этом случае говорят о *распределении* единичной массы в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ), а  $Z$  — центр масс этой системы, то при любом выборе точки  $O$  имеем

$$\vec{OZ} = m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + \dots + m_n \vec{OA}_n.$$

7. Известно, что  $\vec{BM} = 0,7\vec{BA}$ . Какими массами можно загрузить точки  $A$  и  $B$ , чтобы центром масс двух получившихся м. т. оказалась точка  $M$ ? Однозначно ли определены эти массы?

8. Пусть  $A'_1, \dots, A'_k$  — точки, в которые переходят  $A_1, \dots, A_k$  в результате движения  $f$ . Тогда говорят, что система м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$  переходит в результате движения  $f$  в систему м. т.  $m_1 A'_1, \dots, m_k A'_k$ . Докажите следующие утверждения:

а) если  $Z$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$  и  $Z'$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A'_1, \dots, m_k A'_k$ , то  $Z' = f(Z)$  (т. е. если система м. т. подвергается движению  $f$ , то и ее центр масс подвергается тому же движению);

$$\text{б) } m_1 \overrightarrow{A_1 A'_1} + \dots + m_k \overrightarrow{A_k A'_k} = (m_1 + \dots + m_k) \overrightarrow{ZZ'}.$$

9. Пусть (6) — система м. т. (на плоскости или в пространстве) и  $f$  — такое движение (плоскости или пространства), при котором система (6) переходит в себя, т. е. система м. т.  $m_1 f(A_1), m_2 f(A_2), \dots, m_n f(A_n)$  совпадает с точностью до порядка, с исходной системой (6). Докажите, что центр масс  $Z$  системы (6) является неподвижной точкой движения  $f$ , т. е.  $f(Z) = Z$ .

10. Пусть  $Z$  и  $Z'$  — точки пересечения медиан соответственно треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Докажите, что

$$\overrightarrow{ZZ'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).$$

11. Докажите, что центроид правильного пятиугольника совпадает с центром окружности, описанной около этого пятиугольника. Докажите аналогичное утверждение для произвольного правильного многоугольника. Докажите также, что если многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  переходит в себя при повороте вокруг точки  $O$  на угол  $\theta$ , где  $0 < \theta < 2\pi$ , то  $O\overrightarrow{A_1} + O\overrightarrow{A_2} + \dots + O\overrightarrow{A_n} = \vec{0}$ .

12. Докажите, что центроид правильного тетраэдра совпадает с центром сферы, описанной около этого тетраэдра. Докажите аналогичное утверждение для произвольного правильного многогранника.

13. Докажите, что если все м. т. системы лежат в некоторой плоскости, то их центр масс лежит в той же плоскости.

14. Докажите, что если все м. т. системы лежат на некоторой прямой, то центр масс этой системы лежит на той же прямой.

15. Докажите, что если система м. т. переходит в себя при симметрии относительно плоскости  $\alpha$ , то центр масс этой системы лежит в плоскости  $\alpha$ .

16. Докажите, что если конечная система м. т. переходит в себя при повороте вокруг прямой  $l$  на угол  $\varphi$ , где  $0 < \varphi < 2\pi$ , то центр масс этой системы лежит на прямой  $l$ .

17. Докажите, что если конечная система м. т. переходит в себя при повороте вокруг каждой из двух различных прямых  $l_1$  и  $l_2$  на какие-то углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , где  $0 < \varphi_1 < 2\pi$ ,  $0 < \varphi_2 < 2\pi$ , то прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются, и их общая точка служит центром масс данной системы м. т.

18. Многогранник  $M$  называется *транзитивным*, если для любых двух его вершин  $A, B$  существует движение, переводящее этот многогранник в себя, а вершину  $A$  — в  $B$ . Докажите, что если  $M$  — транзитивный многогранник, то существует сфера, описанная вокруг многогранника  $M$  (т. е. сфера, проходящая через все его вершины), и центр  $O$  этой сферы совпадает с центроидом многогранника  $M$ .



19. Докажите, что если многогранник с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  транзитивен (см. задачу 18) и  $O$  — центр его описанной сферы, то  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}$ .

20. Три вектора  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  связаны зависимостью  $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ . Центром каких масс, помещенных в точках  $A$  и  $B$ , служит  $C$ ?

21. Сформулируйте теорему 1 для случая двух м. т.

22. Докажите, что если  $\vec{AZ} = \frac{1}{13}(5\vec{AB} + 8\vec{AC})$ , то при любом выборе в пространстве точки  $O$  верно равенство  $\vec{OZ} = \frac{1}{13}(5\vec{OB} + 8\vec{OC})$ .

23. Точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$  и делит его в отношении  $2:7$ , считая от точки  $A$ , т. е.  $|AC|:|CB| = 2:7$ . Выразите этот факт с помощью понятия центра масс. Запишите несколько векторных равенств, имеющих тот же смысл.

24. Дано:  $\vec{BQ} = 0,4\vec{BA}$ . Каким образом следует распределить между точками  $A$  и  $B$  единичную массу, чтобы центром масс возникающих при этом двух м. т. оказалась точка  $Q$ ?

25. Точка  $L$  служит центром масс двух м. т.  $\alpha A$  и  $\beta B$ . Вычислите отношение  $\vec{BL}:\vec{BA}$ .

26. Пусть  $ABCD$  — квадрат со стороной  $a$ . Точка  $P$  удовлетворяет условию  $\vec{PA} + 3\vec{PB} + 3\vec{PC} + \vec{PD} = \vec{0}$ . На каком расстоянии находится точка  $P$  от центра квадрата?

27. Средней линией четырехугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон. Докажите, что точка пересечения двух средних линий четырехугольника  $ABCD$  является центром масс четырех м. т.  $1A, 1B, 1C, 1D$  (т. е. является центроидом этого четырехугольника).

28. Докажите, что центр масс трех м. т., расположенных в вершинах треугольника, всегда находится строго внутри этого треугольника.

29. Докажите, что если длины отрезков  $BD, CD, AZ, DZ$  на рис. 8 равны соответственно  $b, c, a, d$ , то  $Z$  является центром масс системы м. т.  $(bd + cd)A, acB, abC$ . Выведите отсюда, что любая внутренняя точка треугольника  $ABC$  является центром некоторых трех масс, помещенных в вершинах этого треугольника.

30. Докажите, что при любом выборе точки  $P$  внутри заданного треугольника  $ABC$  возможно (и притом единственным образом) так распределить по его вершинам единичную массу, чтобы центром масс трех получившихся м. т. оказалась точка  $P$ .

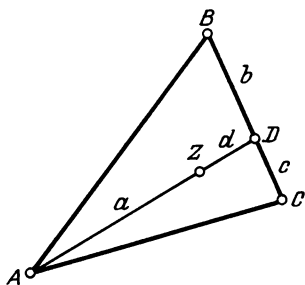


Рис. 8.

31. Сформулируйте и докажите для случая тетраэдра утверждения, аналогичные тем утверждениям относительно треугольника, которые содержатся в задачах 28, 29 и 30.

32. Дано:  $\vec{CM} = 0,1\vec{CA} + 0,3\vec{CB}$  (точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой). Центром каких трех масс, расположенных в вершинах треугольника  $ABC$ , служит точка  $M$ ?

33. Точки  $P, M, A, B$  расположены так, что  $\vec{PM} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB})$ . Центром масс каких м. т. служит точка  $M$ ?

34. Пусть  $Z$  — центр масс  $m_1, m_2, m_3$ , помещенных соответственно в вершинах  $A, B, C$  треугольника, причем  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ . Выразите  $\vec{CZ}$  через  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$ ;  $\vec{OZ}$  — через  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  ( $O$  — произвольная точка).

35. Точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Докажите существование таких положительных чисел  $\alpha, \beta$ , удовлетворяющих условию  $\alpha + \beta < 1$ , что  $\vec{CP} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$ .

36. В пространстве дан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ . Точка  $P$  выбрана в пространстве так, что  $\vec{A_2P} = 0,2\vec{A_2A_1} + 0,3\vec{A_2A_3} + 0,1\vec{A_2A_4}$ . Какими массами следует загрузить вершины тетраэдра, чтобы центром этих масс оказалась точка  $P$ ?

37. С помощью определения центра масс (см. (7)) напишите необходимое и достаточное условие того, что  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

38. Используя (8), запишите другое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы  $M$  была точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

39. Пусть  $C$  — центр масс м. т.  $m_1A_1, \dots, m_kA_k$ , а  $D$  — центр масс м. т.  $m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$ . Докажите, что центр масс всей системы (6) принадлежит отрезку  $CD$ .

40. Рассматривается система м. т.

$$a_1A_1, \dots, a_kA_k, \quad b_1B_1, \dots, b_lB_l, \quad c_1C_1, \dots, c_mC_m.$$

Докажите, что центр масс этой системы принадлежит треугольнику  $ABC$ , где  $A$  — центр масс м. т.  $a_1A_1, \dots, a_kA_k$ ;  $B$  — центр масс м. т.  $b_1B_1, \dots, b_lB_l$ ;  $C$  — центр масс м. т.  $c_1C_1, \dots, c_mC_m$ .

41. Через точку  $M$  проведены три прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  (точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на сторонах  $\triangle ABC$ ). Пусть  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = p, \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = q$ . Докажите формулу Ван-Обеля:

$$\frac{|AM|}{|MA_1|} = p + q.$$

### § 3. Решение геометрических задач барицентрическим методом

При решении геометрической задачи барицентрическим методом мы загружаем отдельные точки массами (т. е. сопоставляем, приписываем этим точкам определенные

положительные числа). Затем привлекаем свойства центров масс всех полученных м. т. или части этих м. т. Искусство применения барицентрического метода состоит в том, чтобы по условию задачи осуществить такой выбор точек и помещаемых в эти точки масс, при котором задача легко и красиво решается. Три основных свойства центров масс особенно важны при решении задач: 1) наличие и единственность центра масс у любой системы материальных точек (см. следствие из теоремы 1); 2) принадлежность центра масс двух м. т. отрезку, соединяющему эти точки (см. теорему 2); 3) возможность перегруппировки материальных точек системы без изменения

положения центра масс всей системы (см. теорему 3). В этом параграфе мы рассмотрим применение барицентрического метода при решении ряда задач планиметрии; пространственные задачи будут рассмотрены в следующем параграфе.

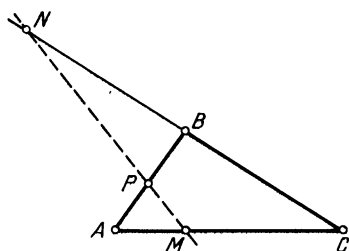


Рис. 9.

**Пример 2.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  (рис. 9) взята такая точка  $M$ , что  $|AM| = \frac{1}{3}|AC|$ , а на продолжении

стороны  $CB$  — такая точка  $N$ , что  $|BN| = |CB|$ . Прямая  $MN$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $P$ . В каком отношении делит эта точка сторону  $AB$  и отрезок  $NM$ ?

**Решение.** Идея решения состоит в размещении в точках  $A, C, N$  таких масс, чтобы центром этих трех масс оказалась точка  $P$ . Ясно, что в  $N$  и  $C$  надо поместить равные массы, так как тогда центром масс этих двух м. т. будет точка  $B$ , и потому, поместив надлежащую массу в точку  $A$ , можно будет добиться, чтобы центром масс всех трех м. т. была нужная нам точка отрезка  $AB$  (а именно, точка  $P$ ).

Итак, поместим в каждую из точек  $N, C$  массу 1, т. е. возьмем м. т.  $1N, 1C$ . Так как, далее,  $|CM| = 2|AM|$ , то в силу правила рычага  $M$  — центр масс двух м. т.  $1C$  и  $2A$ . Следовательно, центр масс  $Z$  всех трех м. т.  $1N, 1C, 2A$  (лежащий, согласно сказанному выше, на отрезке  $AB$ ) будет в то же время по теореме 3 центром масс двух м. т.  $1N$  и  $3M$ , т. е.  $Z \in [MN]$ . Значит,  $Z$  — точка пересечения отрезков  $MN$  и  $AB$ , т. е.  $Z = P$ . Так как  $Z$  — центр масс двух м. т.  $1N$  и  $3M$ , а также центр масс двух м. т.  $2B$  и  $2A$ , то по правилу рычага получаем

$$|NP| : |PM| = 3 : 1, \quad |AP| : |PB| = 4 : 1.$$

**З а м е ч а н и е.** При желании это барицентрическое решение можно было бы «перевести» на векторный язык, т. е. оформить решение как чисто векторное, в котором уже нет упоминания ни о материальных точках, ни о центрах масс. В данном случае такое решение выглядит следующим образом. Зафиксируем какую-нибудь точку  $O$ . Из условия видно, что  $2\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{0}$ ,  $\vec{BC} + \vec{BN} = \vec{0}$ , что равносильно таким векторным равенствам:

$$\vec{OM} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC}}{3}, \quad \vec{OB} = \frac{\vec{OC} + \vec{ON}}{2}.$$

Рассмотрим точку  $Z$ , задаваемую условием

$$\vec{OZ} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{ON}}{4}. \quad (9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \vec{OZ} &= \frac{3\vec{OM} + \vec{ON}}{4} \Rightarrow 3\vec{ZM} + \vec{ZN} = \vec{0} \Rightarrow Z \in [MN]; \\ \vec{OZ} &= \frac{2\vec{OA} + (\vec{OC} + \vec{ON})}{4} = \frac{2\vec{OA} + 2\vec{OB}}{4} \Rightarrow \vec{ZA} + \vec{ZB} = \vec{0} \Rightarrow Z \in [AB]. \end{aligned}$$

Следовательно,  $Z$  есть точка пересечения отрезков  $AB$  и  $MN$ , т. е.  $Z = P$ , и потому  $|PN| : |PM| = 3$ ,  $|PA| = |PB|$ .

Читатель, видимо, отметил для себя, что хотя в результате такого «перевода» с «барицентрического языка» на «векторный язык» получается безупречно строгое решение, имеющее чисто векторный характер, но, однако, это решение выглядит несколько искусственным. Например, если учащийся будет рассказывать это «векторное» решение в классе у доски и кто-либо из слушателей спросит, почему в формуле (9) были взяты именно такие числа в числителе и знаменателе (а в более сложных задачах коэффициенты будут еще причудливее), то учащемуся будет просто нечего ответить на этот вопрос. И в самом деле, появление этих коэффициентов было совершенно естественным, когда мы при решении использовали понятие центра масс, но эти коэффициенты трудно как-либо пояснить после того, как мы за счет «перевода на векторный язык» изъяли механический смысл.

**Пример 3.** В треугольнике  $ABC$  (рис. 10) точка  $F$  делит основание  $BC$  в отношении  $3:1$ , считая от вершины  $B$ . Точки  $M$  и  $P$  отсекают от боковых сторон  $AB$  и  $AC$  по одной шестой, считая соответственно от вершины  $A$  и от вершины  $C$ . В каком отношении делится каждый из отрезков  $MP$  и  $AF$  точкой их пересечения?

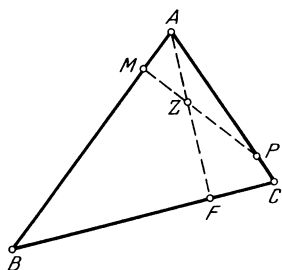


Рис. 10.

**Решение.** Загрузим точки  $B$  и  $C$  такими массами, чтобы их центром оказалась точка  $F$ ; очевидно, достаточно (в силу правила рычага) поместить в  $B$  массу 1 (т. е. рассмотреть материальную точку  $1B$ ), а в  $C$  — массу 3. Далее, имея уже м. т.  $1B$ , подберем для точки  $A$  такую массу  $x$ , чтобы точка  $M$  оказалась центром масс двух м. т.  $1B$  и  $xA$ . По правилу рычага имеем  $1 \cdot |BM| = x|MA|$ , откуда

$x = |BM| : |MA| = 5$ . Наконец, имея м. т.  $3C$ , подберем для точки  $A$  еще другую массу  $y$  так, чтобы точка  $P$  оказалась центром масс двух м. т.  $3C$  и  $yA$ . По правилу рычага имеем  $3|CP| = y|PA|$ , откуда  $y = 3|CP| : |PA| = 0,6$ . У нас возникла новая ситуация: кроме м. т.  $1B$  и  $3C$ , мы имеем в точке  $A$  две различные массы 5 и 0,6. Рассмотрим систему из всех четырех м. т.  $1B$ ,  $5A$ ,  $3C$  и  $0,6A$ . Ее центр масс обозначим через  $Z$ . Перенесем массы м. т.  $1B$  и  $5A$  в их центр масс  $M$ , а массы м. т.  $3C$  и  $0,6A$  — в их центр масс  $P$ . Тогда  $Z$  окажется центром масс лишь двух м. т.  $6M$  и  $3,6P$ . Значит,  $Z \in [MP]$ . Мы могли бы и иначе сгруппировать те же четыре м. т.: перенести массы м. т.  $1B$  и  $3C$  в их центр масс  $F$ , а вместо  $5A$  и  $0,6A$  рассмотреть одну м. т.  $5,6A$ . Тогда  $Z$  окажется центром масс двух м. т.  $4F$  и  $5,6A$ . Поэтому  $Z \in [AF]$ . Следовательно,  $Z$  — точка пересечения отрезков  $MP$  и  $AF$ . Так как  $Z$  — центр масс м. т.  $5,6A$  и  $4F$ , то  $5,6|AZ| = 4|FZ|$ , так что  $|AZ| : |ZF| = 5 : 7$ . Аналогично убедимся, что  $6|MZ| = 3,6|PZ|$ , откуда  $|MZ| : |PZ| = 3 : 5$ .

**Пример 4.** Через точку  $P$ , расположенную внутри параллелограмма  $ABCD$ , проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$

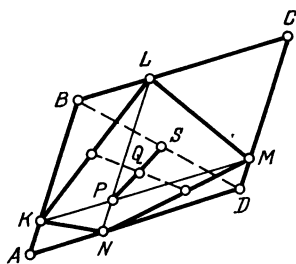


Рис. 11.

соответственно в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  (рис. 11). Пусть  $Q$  — точка пересечения средних линий четырехугольника  $KLMN$ , а  $S$  — центр параллелограмма. Докажем, что точка  $Q$  лежит на отрезке  $PS$ , и определим, в каком отношении делит она этот отрезок.

**Решение.** Сначала загрузим вершины четырехугольника  $KLMN$  массами так, чтобы центром полученных четырех масс оказалась точка  $Q$ .

Для этого достаточно поместить в каждую из точек  $K, L, M, N$  массу 1. Заметим теперь, что  $KBLP$  — параллелограмм; поэтому можно заменить м. т.  $1K$  и  $1L$  на м. т.  $1B$  и  $1P$ , т. е.  $Q$  является центром масс м. т.  $1B, 1P, 1M, 1N$ . Аналогично м. т.  $1M$  и  $1N$  можно заменить на м. т.  $1D$  и  $1P$ . Точка  $Q$  окажется центром масс четырех м. т.  $1B, 1P, 1D, 1P$ , а значит, центром масс двух м. т.  $2S$  и  $2P$  (поскольку  $S$  — середина отрезка  $BD$ ). Но тогда по правилу рычага точка  $Q$  расположена на отрезке  $SP$  и делит его пополам.

**Пример 5.** Около окружности описан четырехугольник  $ABCD$  (рис. 12), касающийся окружности в точках  $M, N, P, Q$ . Известно, что длины отрезков касательных, проведенных из точек  $A, B, C, D$  к окружности, равны соответственно  $a, b, c, d$ . В каком отношении делится каждый из отрезков  $MP$  и  $NQ$  точкой их пересечения?

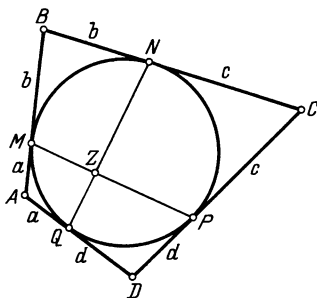


Рис. 12.

**Решение.** Подберем массы  $m_1, m_2$  в вершинах  $A, B$  так, чтобы центром масс материальных точек  $m_1A$  и  $m_2B$  оказалась точка  $M$ . По правилу рычага должно быть  $m_1a = m_2b$ . Поэтому достаточно положить  $m_1 = 1/a, m_2 = 1/b$ . Из аналогичных соображений понятно теперь, что если в вершинах  $A, B, C, D$  поместить массы  $1/a, 1/b, 1/c, 1/d$ , то  $M$  — центр масс м. т.  $\frac{1}{a}A$  и  $\frac{1}{b}B$ , точка  $N$  — центр масс м. т.  $\frac{1}{b}B$  и  $\frac{1}{c}C$ , точка  $P$  — центр масс м. т.  $\frac{1}{c}C$  и  $\frac{1}{d}D$ , а точка  $Q$  — центр масс м. т.  $\frac{1}{d}D$  и  $\frac{1}{a}A$ . Обозначим через  $Z$  центр масс полученной системы из четырех м. т.  $\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C$  и  $\frac{1}{d}D$ . Положение центра масс не изменится, если заменить м. т.  $\frac{1}{a}A$  и  $\frac{1}{b}B$  материальной точкой  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)M$ , а материальные точки  $\frac{1}{c}C$  и  $\frac{1}{d}D$  — материальной точкой  $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)P$ . Значит, точка  $Z$  лежит на отрезке  $MP$ . Аналогично убедимся, что  $Z$  лежит на отрезке  $NQ$ . Сле-

довательно,  $Z$  — точка пересечения отрезков  $MP$  и  $NQ$ . По правилу рычага получаем

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)|MZ| = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)|ZP|,$$

откуда находим

$$\frac{|MZ|}{|ZP|} = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(c+d)ab}{(a+b)cd}.$$

Аналогично,

$$\frac{|NZ|}{|ZQ|} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{(a+d)bc}{(b+c)ad}.$$

### Задачи

42. Пусть  $L$  — точка пересечения средних линий четырехугольника  $ABCD$ ,  $E$  и  $F$  — середины его диагоналей. Докажите, что точки  $L$ ,  $E$ ,  $F$  лежат на одной прямой.

43. Прямая проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  и середину  $L$  медианы  $BB_1$ . В каком отношении делит эта прямая медиану  $CC_1$ ?

44. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна  $1 \text{ м}^2$ . Точка  $M$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3:5$  (считая от вершины  $B$ ). Прямые  $AM$  и  $DB$  пересекаются в точке  $P$ . Вычислите площадь четырехугольника  $CMPD$ .

45. На сторонах  $LK$  и  $LM$  треугольника  $KLM$  взяты такие точки  $A$  и  $B$ , что  $|LA| = 3|AK|$ ,  $|LB| = 4|BM|$ . Пусть  $C$  — точка пересечения прямых  $AM$  и  $KB$ ,  $S$  и  $s$  — площади треугольников  $KLM$  и  $KMC$ . Вычислите  $S:s$ .

46. Через вершину  $D$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, отсекающая  $1/n$  часть от стороны  $AB$ , считая от вершины  $A$ . Какую часть от диагонали  $AC$  отсекает та же прямая?

47. Стороны треугольника  $ABC$ , противолежащие вершинам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , соответственно имеют длины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Докажите, что центром масс системы м. т.  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$  служит центр вписанной окружности этого треугольника. В каком отношении биссектриса  $AA_1$  делится точкой пересечения биссектрис?

48. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята такая точка  $D$ , что  $|BD|:|DC| = 5:1$ . В каком отношении медиана  $CE$  делит отрезок  $AD$ ?

49. На сторонах треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , что  $\vec{AC_1} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{BA_1} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ,  $\vec{CB_1} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ . При пересечении отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  образовался треугольник  $A_2B_2C_2$ . Найдите отношение площадей треугольников  $A_2B_2C_2$  и  $ABC$ .

У к а з а н и е. Найдите, в каком отношении делятся отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  точками  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ .

50. Из четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  никакие три не лежат на одной прямой;  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ ;  $K$  — середина отрезка

$MN$ ;  $P$  — точка пересечения медиан треугольника  $BCD$ . Докажите, что точки  $A, K, P$  лежат на одной прямой.

51. Даны шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами в трех каких-либо из этих шести точек соединена отрезком с точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в трех других точках. Докажите, что получающиеся таким образом десять отрезков пересекаются в одной точке.

52. Противоположные стороны  $AB$  и  $DC$  четырехугольника  $ABCD$  разделены точками  $M$  и  $N$  в одном и том же отношении  $k$  (т. е.  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{NC}$ );  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AD$  и  $BC$ . В каком отношении делится каждый из отрезков  $MN$  и  $PQ$  точкой их пересечения?

53. В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ ;  $M$  — точка пересечения его диагоналей,  $Q$  — середина стороны  $CD$ . Вычислите, в каком отношении делит прямая  $MQ$  сторону  $AB$ , если известно, что  $|AD| = a$ ,  $|BC| = b$ .

54. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята такая точка  $B_1$ , что прямая  $BB_1$  отсекает от стороны  $AC$  одну треть, считая от вершины  $C$ . Через вершину  $A$  проведены две прямые  $AA_1$  и  $AA_2$ , которые делят сторону  $BC$  на три части равной длины. Зная площадь  $S$  треугольника  $ABC$ , вычислите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1, AA_2, BB_1, BC$ .

#### § 4. Сокращенная запись барицентрического решения

В основной формуле (8) § 2 точку  $O$  можно выбрать в пространстве произвольно. Поэтому можно условиться вовсе не писать точку  $O$ , а заодно — и стрелок над векторами. Тогда формула (8) приобретает вид

$$Z = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (10)$$

или иначе

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)Z = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n. \quad (11)$$

Каждая из этих двух сокращенных записей формулы (8) равносильна утверждению о том, что точка  $Z$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$ .

Например, запись

$$P = \frac{2A + 3B + 8C}{13}$$

означает, что точка  $P$  — центр масс трех м. т.  $2A, 3B$  и  $8C$ . Аналогично, запись  $2A + 3B = 5D$  указывает, что центром масс двух м. т.  $2A$  и  $3B$  служит точка  $D$ .



Сокращенные записи позволяют показывать производимую перегруппировку масс. Например, запись

$$P = \frac{(2A + 3B) + 8C}{13} = \frac{5D + 8C}{13} \Rightarrow P \in [CD]$$

говорит о следующем: «пусть  $P$  — центр масс трех м. т.  $2A$ ,  $3B$ ,  $8C$ ; если сосредоточить массы двух м. т.  $2A$  и  $3B$  в их центре масс  $D$ , то точка  $P$  окажется центром масс лишь двух м. т.  $5D$  и  $8C$ ; следовательно, точка  $P$  расположена на отрезке  $CD$ ».

В формуле (11) справа стоит формальная запись «суммы» материальных точек, а слева «материальный центр» этой системы м. т., т. е. материальная точка, получающаяся, если суммарную массу всей системы поместить в ее центре масс. Иначе говоря, сумма  $m_1A_1 + m_2A_2 + \dots + m_nA_n$  означает то же самое, что и материальная точка, возникающая, если суммарную массу  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  поместить в точку  $Z$  (центр масс). При такой трактовке теорема 3 может быть выражена в виде

$$m_1A_1 + \dots + m_kA_k + m_{k+1}A_{k+1} + \dots + m_nA_n = \\ = (m_1A_1 + \dots + m_kA_k) + m_{k+1}A_{k+1} + \dots + m_nA_n.$$

Здесь запись в левой части означает материальный центр всей системы, т. е.  $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)Z$  (где  $Z$  — центр масс системы м. т.  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$ ); правая же часть означает, что вместо части м. т. берется их материальный центр, т. е.  $(m_1 + \dots + m_k)C$  (это выражается в том, что м. т.  $m_1A_1 + \dots + m_kA_k$  заключены в скобки). Написанное равенство означает, что системы м. т., записанные слева и справа, имеют один и тот же материальный центр, т. е. имеют общий центр масс. Таким образом, перегруппировка материальных точек, рассмотренная в § 2 (теорема 3), означает при использовании сокращенной записи, что в сумме материальных точек можно произвольным образом расставлять скобки. (Очевидно, что перестановка слагаемых также допустима, поскольку при определении центра масс порядок м. т. не играет роли, см. (7).)

Сокращенные записи позволяют излагать барицентрические решения геометрических задач более компактно. Например, решение примера 3 из § 3 можно записать следующим образом. Из условия следует, что

$$4F = 1B + 3C; \quad 6M = 1B + 5A; \quad 3,6P = 3C + 0,6A.$$

Пусть

$$Z = \frac{1B + 5A + 3C + 0,6A}{9,6}.$$

Тогда

$$Z = \frac{(1B + 5A) + (3C + 0,6A)}{9,6} = \frac{6M + 3,6P}{9,6} \Rightarrow Z \in [MP];$$

$$Z = \frac{(1B + 3C) + (5A + 0,6A)}{9,6} = \frac{4F + 5,6A}{9,6} \Rightarrow Z \in [FA].$$

Мы видим, что  $Z$  есть точка пересечения отрезков  $MP$  и  $FA$ . По правилу рычага  $6|MZ| = 3,6|ZP|$ ,  $4|FZ| = 5,6|ZA|$ , откуда  $|MZ| : |ZP| = 3 : 5$ ,  $|AZ| : |ZF| = 5 : 7$ .

**Пример 6.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $M$  и  $P$ , что  $|AM| : |MC| = 3 : 1$  и  $|BP| : |PC| = 1 : 2$  (рис. 13). Отрезки  $AP$  и  $BM$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что площадь треугольника  $BPQ$  равна  $1 \text{ м}^2$ . Требуется вычислить площадь треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Легко убедиться, что  $S_{BAC} = 3S_{BAP} = 3S_{BPQ} \times$   
 $\times \frac{|AP|}{|QP|}$ . Поэтому нужно вы-

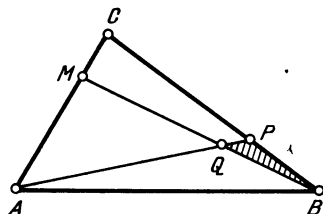


Рис. 13.

числить  $\frac{|AP|}{|QP|}$ . Для этого по-

местим такие массы в вершинах  $A$ ,  $C$ ,  $B$ , чтобы точка  $M$  была центром масс, помещенных в  $A$  и  $C$ , а  $P$  — центром масс, помещенных в  $C$  и  $B$ . В силу условия задачи и правила рычага достаточно в вершине  $A$  поместить массу 1, в  $C$  — массу 3, а в  $B$  — массу 6. Пусть  $Z$  — центр полученных трех масс; тогда

$$Z = \frac{1A + 3C + 6B}{10} = \frac{(1A + 3C) + 6B}{10} = \frac{4M + 6B}{10} \Rightarrow Z \in [MB];$$

$$Z = \frac{1A + (3C + 6B)}{10} = \frac{1A + 9P}{10} \Rightarrow Z \in [PA].$$

Теперь видно, что  $Z$  — точка пересечения отрезков  $MB$  и  $PA$ , т. е.  $Z = Q$ . Из последнего равенства ясно, что  $Z$  — центр масс двух м. т.  $9P$  и  $1A$ ; по правилу рычага  $|AQ| = 9|QP|$ ,  $|AP| = |AQ| + |QP| = 10|QP|$ . Значит,

$\frac{|AP|}{|QP|} = 10$ , и потому  $S_{ABC} = 30 \text{ м}^2$ .

**Пример 7.** От боковых ребер  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  правильной треугольной пирамиды  $PABC$  плоскость  $\alpha$  отсекает соответственно  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$ , считая от вершины  $P$  (рис. 14). Какую часть отсекает плоскость  $\alpha$  от высоты  $PM$  пирамиды?

Решение. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки пересечения ребер  $PA, PB, PC$  с плоскостью  $\alpha$ . Поместим в каждую из точек  $A, B, C$  массу, равную единице. Так как  $|AP| =$

$$= \frac{5}{2} |A_1P|, \text{ т. е. } |AA_1| = \frac{3}{2} |A_1P|,$$

то

$$\frac{5}{2} A_1 = 1A + \frac{3}{2} P,$$

т. е.  $A_1$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $\frac{3}{2}P$ . Аналогично

$$\frac{5}{3} B_1 = 1B + \frac{2}{3} P,$$

$$\frac{5}{4} C_1 = 1C + \frac{1}{4} P.$$

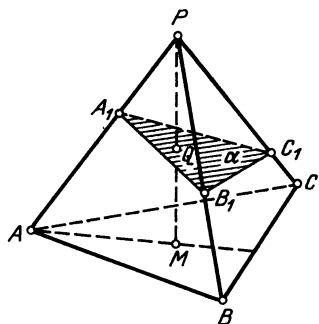


Рис. 14.

Далее, так как пирамида правильная, то  $3M = 1A + 1B + 1C$ . Пусть  $Q$  — центр масс всех шести рассмотренных м. т., т. е.

$$1A + \frac{3}{2}P + 1B + \frac{2}{3}P + 1C + \frac{1}{4}P = \frac{65}{12}Q.$$

Произведем группировку масс:

$$\begin{aligned} \frac{65}{12}Q &= \left(1A + \frac{3}{2}P\right) + \left(1B + \frac{2}{3}P\right) + \left(1C + \frac{1}{4}P\right) = \\ &= \frac{5}{2}A_1 + \frac{5}{3}B_1 + \frac{5}{4}C_1 \Rightarrow Q \in \alpha. \end{aligned}$$

Произведем другую группировку масс:

$$\begin{aligned} \frac{65}{12}Q &= (1A + 1B + 1C) + \left(\frac{3}{2}P + \frac{2}{3}P + \frac{1}{4}P\right) = \\ &= 3M + \frac{29}{12}P \Rightarrow Q \in [PM]. \end{aligned}$$

Значит,  $Q$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  и отрезка  $PM$ .

Из последнего равенства видно, что  $Q$  — центр масс м. т.  $\frac{29}{12}P$

и  $3M$ , и по правилу рычага  $\frac{29}{12}|PQ| = 3|QM|$ , откуда

$$|PQ| = \frac{36}{65}|PM|.$$

**Пример 8.** В угол  $PAQ$  (рис. 15) вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  (где

$B \in (AP)$ ,  $C \in (AQ)$ ) касается окружности в точке  $T$ . Прямые  $BQ$  и  $CP$  пересекаются в точке  $M$ . Докажем, что точки  $A$ ,  $T$ ,  $M$  лежат на одной прямой.

Решение. Пусть  $|AP| = |AQ| = a$ ,  $|BP| = |BT| = m$ ,  $|CQ| = |CT| = n$ . Тогда  $|AB| = a - m$ ,  $|AC| = a - n$ . Поместим в  $A$  массу 1 и подберем для  $P$  такую массу  $x$ , чтобы центром

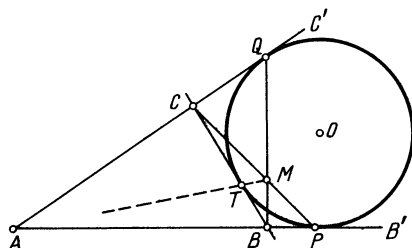


Рис. 15.

масс  $m$ . т.  $1A$  и  $xP$  служила точка  $B$ . По правилу рычага  $1 \cdot |AB| = x |BP|$ , откуда  $x = \frac{a-m}{m}$ . Аналогично убедимся, что

$C$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $yQ$ , где  $y = \frac{a-n}{n}$ . В сокращенных обозначениях имеем

$$(1+x)B = 1A + xP, \quad (1+y)C = 1A + yQ.$$

Центром масс трех м. т.  $1A$ ,  $xP$ ,  $yQ$  служит точка пересечения отрезков  $BQ$  и  $CP$ , т. е. точка  $M$  (см. замечание 2 в § 2). Иначе говоря,

$$1A + xP + yQ = (1+x+y)M.$$

Обозначим теперь через  $Z$  центр масс четырех м. т.  $1A$ ,  $xP$ ,  $1A$ ,  $yQ$ :

$$Z = \frac{1A + xP + 1A + yQ}{2 + x + y}$$

и произведем группировку масс:

$$Z = \frac{(1A + xP) + (1A + yQ)}{2 + x + y} = \frac{(1+x)B + (1+y)C}{(1+x) + (1+y)} = \frac{\frac{1}{m}B + \frac{1}{n}C}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

Теперь видно, что  $Z$  — центр масс м. т.  $\frac{1}{m}B$  и  $\frac{1}{n}C$ . Но центром масс этих м. т. служит, очевидно, точка  $T$ . Значит,

$Z = T$ . Произведем теперь другую группировку:

$$Z = \frac{(1A + xP + yQ) + 1A}{2 + x + y} = \frac{(1 + x + y)M + 1A}{2 + x + y} \Rightarrow \\ \Rightarrow Z \in [AM] \Rightarrow T \in [AM].$$

**Пример 9.** Основанием пирамиды  $FABCD$  служит параллелограмм  $ABCD$  (рис. 16). Плоскость  $\alpha$  пересекает боковые

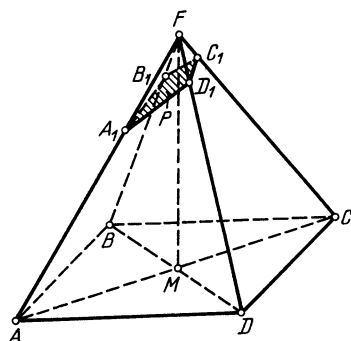


Рис. 16.

ребра  $AF$ ,  $BF$ ,  $CF$ ,  $DF$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , причем  $\frac{|AA_1|}{|A_1F|} = 2$ ,  $\frac{|BB_1|}{|B_1F|} = 5$ ,  $\frac{|CC_1|}{|C_1F|} = 10$ . Вычислим отношение  $x = \frac{|DD_1|}{|D_1F|}$ .

**Решение.** Пусть  $M$  — центр параллелограмма  $ABCD$  и  $P$  — точка пересечения отрезка  $FM$  с плоскостью  $\alpha$ . Рассмотрим треугольник  $AFC$ .

Рассуждая так же, как в примере 3, мы найдем, что точка  $P$  является центром масс четырех м. т.  $1A$ ,  $2F$ ,  $1C$ ,  $10F$ . Теперь имеем

$$P = \frac{1A + 2F + 1C + 10F}{14} = \frac{(1A + 1C) + (2F + 10F)}{14} = \\ = \frac{2M + 12F}{14},$$

т. е.  $P$  — центр масс м. т.  $2M$  и  $12F$ .

Рассмотрим, далее, треугольник  $BFD$ . Рассуждая, как в примере 3, найдем, что  $P$  — центр масс четырех м. т.  $1B$ ,  $5F$ ,  $1D$ ,  $xF$ . Поэтому

$$P = \frac{(1B + 1D) + (5F + xF)}{7 + x} = \frac{2M + (5 + x)F}{7 + x},$$

т. е.  $P$  — центр масс м. т.  $2M$  и  $(5 + x)F$ . Но выше мы видели, что  $P$  — центр масс м. т.  $2M$  и  $12F$ . Следовательно,  $5 + x = 12$ ,

$$x = 7, \text{ т. е. } \frac{|DD_1|}{|D_1F|} = 7.$$

**Пример 10.** На сторонах треугольника  $ABC$  (рис. 17) взяты такие точки  $L$  и  $M$ , что

$$\vec{CL} = \alpha \vec{CA}, \quad \vec{CM} = \beta \vec{CB} \quad (0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1).$$

Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AM$  и  $BL$ . Вычислим отношение  $\frac{|AP|}{|AM|}$ .

**Решение.** Имеем  $\vec{CL} = \alpha \vec{CA} + (1 - \alpha) \vec{CB}$  (здесь слева коэффициент равен 1, и потому справа берутся коэффициенты, сумма которых равна 1). Теперь ясно (утверждение Б теоремы 1), что  $L$  — центр масс двух м. т.:  $\alpha A$  и  $(1 - \alpha) C$ , а следовательно — и двух м. т.  $pA$  и  $1C$ , где

$$p = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Аналогично убедимся, что  $M$  — центр масс двух м. т.  $qB$  и  $1C$ , где

$$q = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

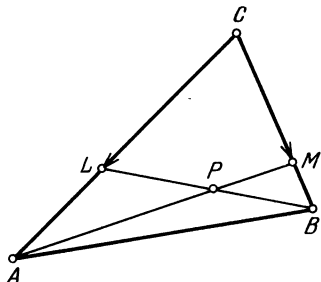


Рис. 17.

Пусть теперь  $Z$  — центр масс всех трех м. т.  $pA$ ,  $qB$ ,  $1C$ . Тогда

$$\begin{aligned} Z &= \frac{pA + qB + 1C}{p + q + 1} = \frac{pA + (qB + 1C)}{p + q + 1} = \\ &= \frac{pA + (q + 1)M}{p + q + 1} \Rightarrow Z \in [AM]. \quad (12) \end{aligned}$$

Аналогично убедимся, что  $Z \in [BL]$ . Значит,  $Z = P$ .

Так как (см. (12))  $P$  — центр масс м. т.  $(q + 1)M$  и  $pA$ , то, применяя при  $n = 2$  формулу (8) (в которой точка  $O$  заменена на  $A$ ), получаем

$$\vec{AP} = \frac{(q + 1) \vec{AM} + p \vec{AA}}{p + q + 1}, \text{ и потому } \frac{|AP|}{|AM|} = \frac{q + 1}{p + q + 1} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}.$$

### Задачи

**55.** Изложите в сокращенных обозначениях решение задачи из примера 5 (§ 3).

**56.** Изложите в сокращенных обозначениях решение примера 1.

**57.** На сторонах шестиугольника последовательно отмечены их середины  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ . Будет ли точка пересечения медиан треугольника  $B_1B_3B_5$  совпадать с точкой пересечения медиан треугольника  $B_2B_4B_6$ ?

**58.** В основании пирамиды  $PABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  с центром  $K$ . На боковых ребрах  $PA$  и  $PB$  выбраны точки  $A_1$  и  $B_1$  так, что  $\frac{|PA_1|}{|A_1A|} = 5$ ,  $\frac{|PB_1|}{|B_1B|} = 0,5$ . Через точки  $A_1, B_1$  и середи-

ну отрезка  $PK$  проведена плоскость  $\alpha$ . В каком отношении делит она третье боковое ребро?

59. На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $BAC$  выбраны такие точки  $P$  и  $Q$ , что  $|BP| = n|PA|$ ,  $|AQ| = n|QC|$ . В каком отношении делит прямая  $PQ$  высоту  $AM$ ?

60. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведены две прямые  $BB_1$  и  $BB_2$ , отсекающие от стороны  $AC$  по одной пятой (соответственно считая от вершин  $A$  и  $C$ ). Через вершину  $C$  тоже проведены две прямые  $CC_1$  и  $CC_2$ ; они отсекают от стороны  $AB$  по одной четверти, считая от вершин  $A$  и  $B$  соответственно. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $1 \text{ дм}^2$ . Определите, чему равна площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $BB_1$ ,  $BB_2$ ,  $CC_1$ ,  $CC_2$ .

61. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $L$  и  $M$ , что  $\overrightarrow{CL} = \alpha \overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{CM} = \beta \overrightarrow{CB}$ ;  $P$  — точка пересечения прямых  $AM$  и  $BL$ . Вычислите отношения  $|AP| : |AM|$  и  $|BP| : |BL|$  (см. пример 10).

62. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 1. Точка  $M$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3:5$ . Вычислите площадь четырехугольника  $CMPD$ , где  $P$  — точка пересечения прямых  $AM$  и  $BD$ .

63. На ребрах  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$  треугольной пирамиды взяты точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  так, что  $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$ ,  $|AN| = \frac{1}{3}|AC|$ ,  $|BP| = \frac{1}{5}|BD|$ .

Через точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  проведена плоскость. В каком отношении делит она ребро  $DC$ ?

64. Из четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  обозначены соответственно через  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Докажите, что отрезки  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  пересекаются в одной точке  $M$ .

65. Даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Через  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  обозначены середины отрезков  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$ ,  $BC$ . Докажите, что отрезки  $KL$ ,  $MN$ ,  $PQ$  имеют общую середину. Докажите также, что эта общая середина совпадает с точкой  $M$ , рассмотренной в предыдущей задаче.

66. Противоположные звенья  $AB$  и  $DC$  пространственной замкнутой ломаной  $ABCD$  разделены точками  $M$ ,  $N$  в одном и том же отношении  $k$ ; отрезки  $BC$ ,  $MN$ ,  $AD$  разделены точками  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  в одном и том же отношении  $l$ . Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  лежат на одной прямой.

67. Внутри некоторого треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ , и в треугольниках  $BDC$ ,  $CDA$ ,  $ADB$  отмечены точки пересечения медиан (точки  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ). В полученном таким образом треугольнике  $RST$  также отмечена точка  $M$  пересечения медиан. Пусть  $P$  — точка пересечения медиан исходного треугольника  $ABC$ . Лежат ли три точки  $D$ ,  $M$ ,  $P$  на одной прямой? Вычислите отношение  $|DM| : |MP|$ .

## ИДЕЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ МАСС

«Геометрия масс исходит из тех соображений, что точки пространства рассматриваются не сами по себе, а им приписываются выбранные по произволу положительные или отрицательные числа в качестве их масс, так что точки появляются лишь снабженными определенными коэффициентами».

Г. Юнг «Геометрия масс»

До сих пор мы считали, что в наших рассуждениях все массы выражаются положительными числами. Однако, как мы увидим ниже, формальные определения понятий «материальная точка» и «центр масс» пригодны и тогда, когда «массы» берутся из других числовых множеств. Оказывается, что если стать на такую более общую точку зрения, то возникают новые содержательные геометрические приложения понятия центра масс. И хотя формально определенным «материальным точкам с отрицательными (или тем более мнимыми) массами» мы не можем сопоставить физические образы столь же привычные, как в случае положительных масс, однако и в таких более общих случаях использование терминологии, заимствованной из механики, позволяет привлечь физическую интуицию к поиску решений задач. Математически же решения получаются безупречно строгими, поскольку ниже приводятся корректные определения центров масс для случая действительных или комплексных масс и доказательства их свойств.

### § 5. Отрицательные массы

Данные выше (в § 2) математические определения понятий «материальная точка» и «центр масс системы материальных точек» применимы и в том случае, когда «массы» (все или некоторые из них) являются отрицательными числами. Например, «материальная точка»  $(-3)A$  — это точка  $A$  вместе с сопоставленным ей числом  $-3$ , а «центр масс двух м. т.  $(-3)A$  и  $5B$ » — это такая точка  $Z$ , для которой выполняется векторное равенство

$$(-3)\overrightarrow{ZA} + 5\overrightarrow{ZB} = \vec{0}$$



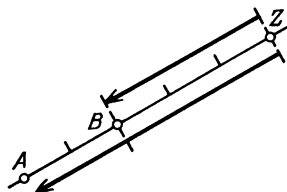


Рис. 18.

(рис. 18). Если потребовать, чтобы суммарная масса системы

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n$$

(т. е. число  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ) была отлична от нуля (что мы и будем предполагать всюду в дальнейшем), то остаются в силе: а) определение центра масс (см. (7)); б) теорема 1

(и, в частности, формула (8), выражающая радиус-вектор  $\vec{OZ}$  центра масс через радиусы-векторы и массы всех м. т. системы); в) следствие из теоремы 1 о существовании и единственности центра масс у любой системы материальных точек.

Некоторое изменение претерпевает теорема 3 о возможности перегруппировки материальных точек: для справедливости этой теоремы приходится предполагать, что не только суммарная масса  $m_1 + \dots + m_n$  всей системы отлична от нуля, но и сумма масс отмеченных материальных точек (т. е.  $m_1 + \dots + m_k$ ) отлична от нуля. Причина этих ограничений понятна: суммарная масса  $m_1 + \dots + m_n$  стоит в знаменателе дроби в формуле (8), а в доказательстве теоремы 3 используется формула, в знаменателе которой стоит сумма масс отмеченных материальных точек. Доказательства же теорем 1 и 3 остаются без изменения.

Далее, теорема 2 для случая действительных (не обязательно положительных) масс заменяется следующим утверждением:

*Центр  $Z$  двух масс  $m_1$  и  $m_2$  с ненулевой суммой, помещенных в концах отрезка  $A_1 A_2$ , лежит на прямой, содержащей этот отрезок, и удовлетворяет условию  $|m_1| d_1 = |m_2| d_2$ , где  $d_1 = |ZA_1|$ ,  $d_2 = |ZA_2|$  — соответствующие «плечи»; при этом точка  $Z$  лежит на отрезке  $A_1 A_2$ , если знаки чисел  $m_1$  и  $m_2$  одинаковы, и вне его, если они противоположны.*

Так видоизменяется архимедово правило рычага для случая произвольных действительных масс. Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 2 (с очевидными изменениями). Заметим, что центр масс двух м. т. (с ненулевой суммарной массой) расположен ближе к «более массивной» из них, т. е. к той, масса которой больше по модулю; это сразу следует из равенства

$$|m_1| d_1 = |m_2| d_2.$$

**Пример 11.** Пусть  $ABCD$  — параллелограмм; докажем, что центром масс трех м. т.  $mA$ ,  $(-m)B$ ,  $mC$  (рис. 19) является четвертая вершина  $D$ , т. е. (в сокращенных обозначениях)  $mA + (-m)B + mC = mD$ .

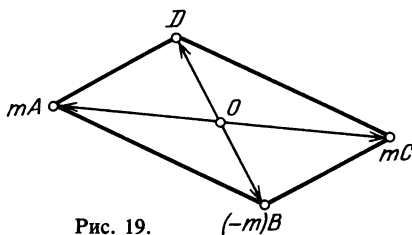


Рис. 19.

**Решение.** Пусть  $O$  — центр параллелограмма, а  $Z$  — иско-  
мый центр масс. Тогда по формуле (8)

$$\vec{OZ} = \frac{m\vec{OA} - m\vec{OB} + m\vec{OC}}{m - m + m} = \frac{m\vec{OA} + m\vec{OD} - m\vec{OA}}{m} = \vec{OD},$$

т. е.  $Z = D$ .

Приведем теперь примеры использования отрицательных масс при решении геометрических задач.

**Пример 12.** Пусть  $A_1, A_2, A_3$  — вершины треугольника (рис. 20);  $B_1, B_2, B_3$  — середины противолежащих им сторон;  $M$  — произвольная точка;  $M_1, M_2, M_3$  — точки, симметричные  $M$  относительно точек  $B_1, B_2, B_3$ . Докажем, что прямые  $A_1M_1, A_2M_2$  и  $A_3M_3$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Так как  $A_1, M, A_2, M_3$  — вершины параллелограмма, то в силу результата примера 11 имеем

$$1M_3 = 1A_1 + 1A_2 + (-1)M.$$

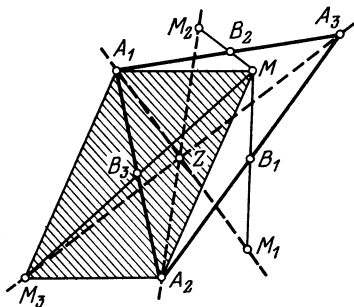


Рис. 20.

Любая точка  $Z$  прямой  $M_3A_3$

(кроме  $A_3$ ) является центром масс двух м.т.  $1M_3$  и  $x A_3$ , где  $x$  — число (положительное или отрицательное), зависящее от выбора точки  $Z$ . Иначе говоря,

$$(1 + x)Z = 1M_3 + xA_3 = 1A_1 + 1A_2 + xA_3 + (-1)M.$$

Теперь видно, что при  $x = 1$  точки  $A_1, A_2, A_3$  входят в правую часть с одинаковыми коэффициентами. Иначе говоря, точка  $Z$ , определяемая равенством  $2Z = 1M_3 + 1A_3$  (т. е. середина отрезка  $A_3M_3$ ), удовлетворяет условию

$$2Z = 1A_1 + 1A_2 + 1A_3 + (-1)M.$$

Ввиду одинаковости коэффициентов точки  $A_1, A_2, A_3$  равно-

правны в этой записи, и потому рассматриваемая точка  $Z$  принадлежит не только прямой  $M_3A_3$ , но и двум другим прямым  $M_1A_1$ ,  $M_2A_2$ . Кроме того, эта точка  $Z$  является серединой не только отрезка  $A_3M_3$ , но и отрезков  $A_1M_1$ ,  $A_2M_2$ . Таким образом, три отрезка  $A_1M_1$ ,  $A_2M_2$ ,  $A_3M_3$  имеют общую точку  $Z$  и каждый из них делится в этой точке пополам.

Заметим, что решение можно было бы изложить короче, если сразу использовать найденную точку  $Z$ , т. е. центр масс четырех м. т.  $1A_1$ ,  $1A_2$ ,  $1A_3$ ,  $(-1)M_3$ ; однако, тогда было бы трудно мотивировать, почему взяты именно эти м. т.

**Пример 13.** Точка  $M$  (рис. 21) — середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ . Прямая  $l$ , не проходящая через точку  $C$ , пере-

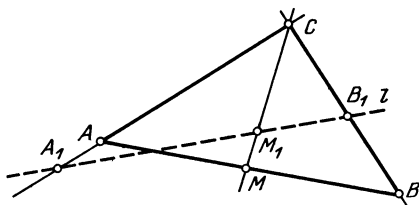


Рис. 21.

секает прямые  $CA$ ,  $CB$  и  $CM$  в таких точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $M_1$ , что  $\overrightarrow{CA} = p\overrightarrow{CA_1}$ ,  $\overrightarrow{CB} = q\overrightarrow{CB_1}$ ,  $\overrightarrow{CM} = r\overrightarrow{CM_1}$ . Выразим  $r$  через  $p$  и  $q$ .

**Решение.** Идея состоит в том, чтобы загрузить точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  такими массами, для которых центром масс будет точка  $M_1$ . Ясно, что в  $A$  и  $B$  надо поместить равные массы, так как тогда центром масс этих двух м. т. будет точка  $M$ , после чего, подобрав надлежащую массу для точки  $C$ , можно будет добиться, чтобы центром масс всех трех м. т. была нужная нам точка прямой  $CM$  (а именно, точка  $M_1$ ).

Итак, поместим в каждую из точек  $A$ ,  $B$  массу 1, т. е. возьмем м. т.  $1A$ ,  $1B$ . Остается подобрать для  $C$  такую массу  $x$ , чтобы центром масс м. т.  $1A$ ,  $1B$ ,  $xC$  была точка  $M_1$  (а не иная точка прямой  $CM$ ). Для этого сначала поместим в  $C$  такую массу  $m_1$ , чтобы центром масс м. т.  $1A$  и  $m_1C$  была точка  $A_1$ , а затем добавим в точку  $C$  еще такую массу  $m_2$ , чтобы центром масс м. т.  $1B$  и  $m_2C$  была точка  $B_1$ . Тогда центр масс  $Z$  всех четырех м. т.  $1A$ ,  $1B$ ,  $m_1C$ ,  $m_2C$  будет в то же время центром масс м. т.  $(1 + m_1)A_1$  и  $(1 + m_2)B_1$ , т. е.  $Z \in (A_1B_1)$ . Так как, кроме того,  $Z \in (CM)$ , то и получится, что  $Z$  совпадает с  $M_1$ .

Чтобы центром масс м. т.  $1A$  и  $m_1C$  была точка  $A_1$ , должно быть  $(1 + m_1)A_1 = 1A + m_1C$ , откуда  $(1 + m_1)\overrightarrow{CA_1} =$

$= 1 \cdot \overrightarrow{CA} + m_1 \cdot \overrightarrow{CC}$ , и потому  $(1 + m_1) \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} = p \overrightarrow{CA_1}$ , т. е.  $1 + m_1 = p$ . Таким образом,  $m_1 = p - 1$ . Аналогично  $m_2 = q - 1$ .

Мы видим, что  $Z = M_1$  есть центр масс четырех м. т.  $1A$ ,  $1B$ ,  $(p - 1)C$ ,  $(q - 1)C$ , т. е. центр масс двух м. т.  $2M$  и  $(p + q - 2)C$ . Иначе говоря,  $(p + q) M_1 = 2M + (p + q - 2)C$ , откуда  $(p + q) \overrightarrow{CM_1} = 2\overrightarrow{CM} + (p + q - 2) \overrightarrow{CC}$ , т. е.  $\frac{(p + q)}{2} \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CM}$ . Следовательно,  $r = \frac{p + q}{2}$ .

Мы подробно изложили это решение, чтобы мотивировать выбор требуемых масс. А теперь, при желании, можно изложить это решение короче. Именно, пусть  $Z$  — центр масс четырех м. т.  $1A$ ,  $1B$ ,  $(p - 1)C$ ,  $(q - 1)C$ . Тогда, учитывая указанное в условии равенство  $p \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} = 1 \overrightarrow{CA} + (p - 1) \overrightarrow{CC}$ , т. е.  $pA_1 = 1A + (p - 1)C$ , и аналогичное равенство  $qB_1 = 1B + (q - 1)C$ , находим

$$\begin{aligned} (p + q)Z &= 1A + 1B + (p + q - 2)C = \\ &= 2M + (p + q - 2)C \Rightarrow Z \in (MC), \\ (p + q)Z &= (1A + (p - 1)C) + (1B + (q - 1)C) = \\ &= pA_1 + qB_1 \Rightarrow Z \in (A_1B_1). \end{aligned}$$

Это означает, что  $Z = M_1$ . Теперь имеем (взяв первую из двух написанных строк)  $(p + q)M_1 = 2M + (p + q - 2)C$ , откуда и получаем (как и в конце приведенного выше решения)  $r = (p + q)/2$ .

**Пример 14.** Основанием пирамиды  $SABCD$  служит параллелограмм  $ABCD$  (рис. 22). Плоскость  $\alpha$  отсекает от трех боковых ребер  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  соответственно треть, пятую часть и четверть, считая от вершины  $S$ . Определим, какую часть отсекает эта плоскость от четвертого бокового ребра.

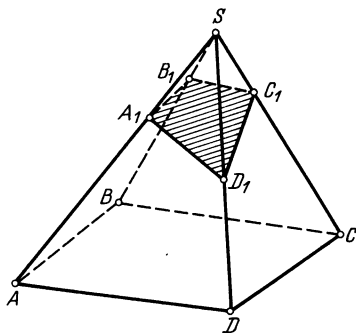


Рис. 22.

**Решение.** Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Мы знаем (см. пример 11), что  $D$  — центр масс м. т.  $1A$ ,  $(-1)B$ ,  $1C$ . Подберем теперь для точки  $S$  три такие массы  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , чтобы центром масс м. т.  $1A$  и  $m'S$  служила точка  $A_1$ , центром масс м. т.  $(-1)B$  и  $m''S$  была  $B_1$ , а центром масс м. т.  $1C$  и  $m'''S$  оказалась

точка  $C_1$ . Так как точка  $A_1$  принадлежит отрезку  $SA$ , то массы 1 и  $m'$ , помещаемые в точки  $A$  и  $S$ , должны иметь одинаковые знаки, т. е.  $m' > 0$ . При этом по правилу рычага  $1 \cdot |A_1A| = |m'| \cdot |A_1S|$ , откуда (в силу условия  $|A_1S| : |A_1A| = 1 : 2$ ) находим  $m' = 2$ . Аналогично найдем  $m'' = -4$ ,  $m''' = 3$ . Рассмотрим систему из всех шести м. т.  $1A$ ,  $2S$ ,  $(-1)B$ ,  $(-4)S$ ,  $1C$ ,  $3S$ , и пусть  $Z$  — их центр масс. Произведем две различные группировки этих м. т.:

$$Z = \frac{(1A + 2S) + ((-1)B + (-4)S) + (1C + 3S)}{1 + 2 + (-1) + (-4) + 1 + 3} = \frac{3A_1 + (-5)B_1 + 4C_1}{2} \Rightarrow Z \in \alpha;$$

$$Z = \frac{(1A + (-1)B + 1C) + (2S + (-4)S + 3S)}{2} = \frac{1D + 1S}{2} \Rightarrow Z \in [SD].$$

Следовательно,  $Z = D_1$ , причем из равенства  $Z = \frac{1}{2}(1D + 1S)$  следует, что  $D_1$  — середина ребра  $SD$ , т. е. плоскость  $\alpha$  отсекает половину этого ребра.

Заметим, что чисто геометрически решить эту задачу не так-то просто!

**Пример 15.** Дан четырехугольник  $AFME$  (рис. 23). Прямые  $AF$  и  $ME$  пересекаются в точке  $C$ , а прямые  $AE$  и  $MF$  — в точке  $B$ . Диагональ  $AM$  пересекает диагональ  $EF$  и прямую  $BC$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Вычислим

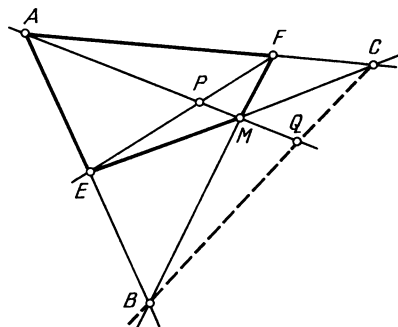


Рис. 23.

отношение  $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QM}} : \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PM}}$ .

**Решение.** Пусть  $b$ ,  $c$  — такие числа, что  $Q$  — центр масс м. т.  $bB$  и  $cC$ , т. е.  $(b + c)Q = bB + cC$ . Поместим в точке  $A$  такую массу  $a$ , чтобы центром масс м. т.  $aA$  и  $(b + c)Q$  оказалась точка  $M$ .

Обозначим через  $Z'$  центр масс м. т.  $aA$  и  $bB$ . Ясно, что  $Z' \in (AB)$ . Кроме того, так как  $M$  — центр масс м. т.  $aA$  и  $(b + c)Q$ , т. е. центр масс м. т.  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$ , то  $M$  является также центром масс м. т.  $(a + b)Z'$  и  $cC$ , откуда следует, что точки  $M$ ,  $Z'$ ,  $C$

лежат на одной прямой, т. е.  $Z' \in (MC)$ . Итак,  $Z'$  есть точка пересечения прямых  $AB$  и  $MC$ , т. е.  $Z' = E$ . Мы видим, что центром масс м. т.  $aA$  и  $bB$  является точка  $E$ . Аналогично,  $F$  — центр масс м. т.  $aA$  и  $cC$ . Пусть теперь  $Z$  — центр масс четырех м. т.  $aA, bB, aA, cC$ . Тогда

$$Z = \frac{(aA + bB) + (aA + cC)}{2a + b + c} = \frac{(a + b)E + (a + c)F}{2a + b + c} \Rightarrow Z \in (EF);$$

$$Z = \frac{aA + (aA + bB + cC)}{2a + b + c} = \frac{aA + (a + b + c)M}{2a + b + c} \Rightarrow Z \in (AM).$$

Следовательно,  $Z = P$ . Из последнего равенства видно, что  $P$  — центр масс м. т.  $aA$  и  $(a + b + c)M$ , и поэтому  $(a + b + c)\vec{PM} + a\vec{PA} = \vec{0}$ . С другой стороны,  $M$  — центр масс м. т.  $(b + c)Q$  и  $aA$ , и поэтому  $(a + b + c)\vec{QM} = (b + c)\vec{QQ} + a\vec{QA} = a\vec{QA}$ . Мы видим, что  $\frac{\vec{AP}}{\vec{PM}} = \frac{a + b + c}{a} = -\frac{\vec{AQ}}{\vec{QM}}$ , откуда вытекает, что искомое отношение равно  $-1$ .

В различных вопросах геометрии встречаются ситуации, когда приходится рассматривать «сложное отношение» (или, иначе, *ангармоническое отношение*) четырех различных точек  $A, B, C, D$ , лежащих на одной прямой. Оно обозначается через  $(A, B; C, D)$  и определяется как частное двух «простых отношений»:

$$(A, B; C, D) = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}}.$$

Особенно важную роль понятие сложного отношения играет в проективной геометрии. В частности, если  $(A, B; C, D) = -1$ , то четверка точек  $A, B, C, D$  называется *гармонической*. В примере 15 было доказано, что четверка  $A, M, P, Q$  — гармоническая, т. е. если дан полный четырехсторонник (четыре прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке),  $A$  и  $M$  — две противоположные его вершины, то прямая  $AM$  (диагональ) пересекает две другие диагонали  $EF$  и  $BC$  в таких точках  $P, Q$ , что четверка  $A, M, P, Q$  — гармоническая. Эта теорема играет важную роль в проективной геометрии.

### Задачи

**68.** Точка  $M$  принадлежит прямой  $A_1A_2$  (точки  $A_1$  и  $A_2$  различны). Докажите существование таких чисел  $m_1, m_2$ , что  $M$  — центр масс м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$ . Докажите, что при дополнительном условии  $m_1 + m_2 = 1$  массы  $m_1$  и  $m_2$  определяются точкой  $M$  однозначно.

69. Отрезок  $A_0A_5$  разделен на пять конгруэнтных отрезков точками  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . В точке  $A_1$  помещена масса  $m_1 = 1$ . Какую массу  $m_k$  следует поместить в точке  $A_k$ , чтобы при каждом  $k = 2, 3, 4, 5$  центром масс двух м. т.  $1A_1$  и  $m_kA_k$  была точка  $A_0$ ?

70. Пусть  $M$  — центр параллелограмма  $ABCD$ . Какие массы следует поместить в точке  $M$  и вершинах  $A$  и  $B$ , чтобы центром этих трех масс оказалась вершина  $C$ ?

71. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ , а  $S$  — центр описанной около него окружности. Можно доказать, что имеют место векторные равенства

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}, \quad \overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}).$$

Центром масс каких м. т. служит точка  $H$ ? Точка  $S$ ?

72. Известно, что  $AM = \alpha BC$ . Какие массы нужно разместить в точках  $A, B, C$ , чтобы их центром масс была точка  $M$ ?

В задачах 73–74 содержится несколько простых фактов, которые аналогичны замечаниям, 1, 2 § 2 и которые могут быть использованы при решении задач.

73. Докажите, что центр  $Z$  трех масс  $m_1, m_2, m_3$  с ненулевой суммой, помещенных в вершинах некоторого треугольника  $A_1A_2A_3$ , тогда и только тогда лежит на прямой, проходящей через вершину  $A_1$  и параллельной стороне  $A_2A_3$ , когда  $m_2 + m_3 = 0$ .

74. а) Три массы  $m_1, m_2, m_3$  с ненулевой суммой помещены в вершинах треугольника  $A_1A_2A_3$ . Прямая, проходящая через центр этих масс и вершину  $A_1$ , пересекает сторону  $A_2A_3$  или ее продолжение в некоторой точке  $A'_1$ . Докажите, что эта точка служит центром масс м. т.  $m_2A_2$  и  $m_3A_3$ .

б) В трех вершинах треугольника  $A_1A_2A_3$  помещены ненулевые массы  $m_1, m_2, m_3$  с ненулевой суммой. Докажите, что если м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  имеют центр масс  $A'_3$ , а м. т.  $m_1A_1$  и  $m_3A_3$  имеют центр масс  $A'_2$ , то прямые  $A_2A'_2$  и  $A_3A'_3$  пересекаются, и точка их пересечения служит центром всех трех масс, помещенных в вершинах треугольника.

75. Какие массы следует поместить в вершинах треугольника  $ABC$ , имеющего длины сторон  $a, b, c$ , чтобы центром масс этих трех м. т. был центр вневписанной окружности, касающейся стороны  $AB$  и продолжений двух других сторон?

76. Сформулируйте и докажите для случая четырех м. т. в пространстве аналог утверждения, содержащегося в задаче 73.

77. Сформулируйте и докажите для случая четырех м. т. в пространстве аналог утверждения, содержащегося в задаче 74а).

78. Сформулируйте и докажите для случая четырех м. т. в пространстве аналог утверждения, содержащегося в задаче 74б).

79. В точках  $A_1$  и  $A_2$  расположены массы  $m_1$  и  $m_2$ , одна из которых положительная, а другая отрицательная, так что центр масс  $Z$  м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  расположен на прямой  $A_1A_2$  вне отрезка  $A_1A_2$ . При каком соотношении между массами  $m_1$  и  $m_2$  точка  $Z$  расположена на луче  $A_1A_2$ ? На луче  $A_2A_1$ ?

80. В вершинах  $A, B, C$  параллелограмма  $ABCD$  помещены массы  $m_1, m_2, m_3$ . Докажите, что центр масс этих трех м. т. совпадает с центром масс трех других м. т.:  $(m_1 + m_2) A, (m_2 + m_3) C, -m_2 D$ .

81. Докажите, что если справедливы соотношения  $m_0 \vec{OA}_0 + m_1 \vec{OA}_1 + \dots + m_n \vec{OA}_n = \vec{0}$ , где  $m_0 + m_1 + \dots + m_n = 0, m_0 \neq 0$ , то  $A_0$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ .

82. Точка  $Z$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ . Докажите, что если  $m_n \neq 0$ , то  $A_n$  — центр масс системы м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_{n-1} A_{n-1}, (-m_1 - m_2 - \dots - m_n) Z$ .

83. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит параллелограмм  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  отсекает от трех боковых ребер  $SA, SB, SC$  соответственно половину, две трети, три четверти, считая от вершины  $S$ . Какую часть она отсекает от четвертого бокового ребра?

84. В окружность  $\Gamma$  вписан четырехугольник  $ABCD$ . Через середину каждой стороны четырехугольника проведена прямая, перпендикулярная противоположной стороне. Докажите, что возникающие таким образом четыре прямые имеют общую точку.

У к а з а н и е. Докажите, что все четыре прямые проходят через центр масс м. т.  $1A, 1B, 1C, 1D, (-2)S$ , где  $S$  — центр окружности.

85. Докажите теорему Ньютона: Если вокруг окружности описан четырехугольник  $ABCD$ , то центр  $M$  окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей этого четырехугольника.

У к а з а н и е. Пусть  $F$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ . Тогда  $M$  — центр масс трех м. т.  $m_1 A, m_2 B, m_3 F$ , где  $m_1 = |BF|$ ,  $m_2 = |AF|$ ,  $m_3 = |AB|$ . Точно так же  $M$  — центр масс трех м. т.  $m_4 C, m_5 D, m_6 F$ , где  $m_4 = -|DF|$ ,  $m_5 = -|CF|$ ,  $m_6 = |CD|$ . Следовательно,  $M$  — центр масс всех шести рассмотренных м. т. Далее докажите, что  $F$  — центр масс м. т.  $m_1 C$  и  $m_5 B$  и в то же время центр масс м. т.  $m_4 A$  и  $m_2 D$ , и произведите группировку, учитывая соотношения  $m_3 + m_6 = m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ .

86. На ребрах  $FB, FC$  и  $AB$  пирамиды  $FABC$  выбраны такие точки  $P, Q, R$ , что  $|FP| = 4|PB|$ ,  $|FQ| = 5|QC|$ ,  $|AR| = 6|RB|$ . В каком отношении делится ребро  $FA$  плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ?

87. На одной из сторон угла с вершиной  $O$  даны три такие точки  $A_1, A_2, A_3$ , что  $|OA_1| : |A_1 A_2| : |A_2 A_3| = 1 : 2 : 3$ ; на другой стороне — три такие точки  $A'_1, A'_2, A'_3$ , что  $|OA'_1| : |A'_1 A'_2| : |A'_2 A'_3| = 3 : 3 : 2$ . Докажите, что прямая  $A_3 A'_3$  проходит через точку пересечения прямых  $A_1 A'_1$  и  $A_2 A'_2$ .

88. Около окружности описан четырехугольник. В каждой точке, в которой сторона четырехугольника касается окружности, помещена масса, численно равная длине этой стороны. Докажите, что центром этих масс служит центр окружности.

## § 6. Теоремы Чевы и Менелая

Итальянский инженер-гидравлик Джованни Чева (XVII век) заинтересовался следующим вопросом. Представим себе, что на сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  выбраны



соответственно точки  $A_1, B_1, C_1$ . Можно ли, не производя никаких построений и измерений внутри треугольника (считая, например, что внутри треугольника  $ABC$  — лес или болото), а лишь по результатам измерений на контуре треугольника решить, проходят ли три прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  через одну точку? Ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Чевоу в 1678 году с помощью свойств центров масс.

**Теорема 4.** Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  (рис. 24, 25) выбраны на сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  или на их

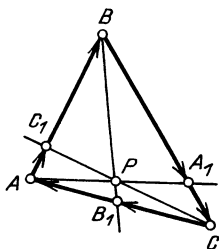


Рис. 24.

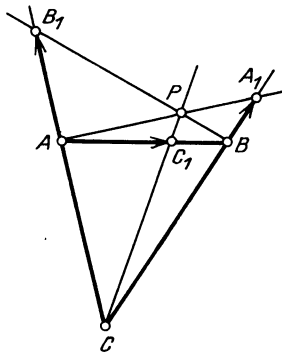


Рис. 25.

продолжениях так, что выполняется «условие Чевы»:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

Тогда либо все три прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  имеют общую точку, либо все они параллельны.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — такие числа, что

$$\overrightarrow{AC_1} = \alpha \overrightarrow{C_1B}, \quad \overrightarrow{BA_1} = \beta \overrightarrow{A_1C}, \quad \overrightarrow{CB_1} = \gamma \overrightarrow{B_1A}. \quad (13)$$

Легко видеть, что  $\alpha \neq -1, \beta \neq -1, \gamma \neq -1$ . Кроме того,  $\alpha\beta\gamma = 1$  (в силу условия Чевы). Первое равенство (13), т. е. соотношение  $\overrightarrow{C_1A} + \alpha \overrightarrow{C_1B} = \vec{0}$ , показывает, что  $C_1$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $\alpha B$ . Второе равенство (13) показывает, что  $A_1$  — центр масс м. т.  $\alpha B$  и  $\alpha\beta C$ . Третье равенство означает, что  $B_1$  — центр масс м. т.  $\alpha\beta C$  и  $\alpha\beta\gamma A$ ; иначе говоря,  $B_1$  — центр масс м. т.  $\alpha\beta C$  и  $1A$ .

Рассмотрим три м. т.  $1A, \alpha B, \alpha\beta C$ , и пусть сначала их суммарная масса отлична от нуля, т. е.  $1 + \alpha + \alpha\beta \neq 0$ ;

обозначим через  $Z$  центр масс всех трех м. т. Тогда

$$Z = \frac{1A + \alpha B + \alpha\beta C}{1 + \alpha + \alpha\beta} = \frac{(1A + \alpha B) + \alpha\beta C}{1 + \alpha + \alpha\beta} = \frac{(1 + \alpha)C_1 + \alpha\beta C}{1 + \alpha + \alpha\beta} \Rightarrow Z \in (CC_1).$$

Аналогичным рассуждением (группируя м. т. иначе) можно убедиться, что  $Z \in (BB_1)$  и  $Z \in (AA_1)$ . Таким образом, прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  имеют общую точку  $Z$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $1 + \alpha + \alpha\beta = 0$ . Так как  $B_1$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $\alpha\beta C$ , то

$$(1 + \alpha\beta)\overrightarrow{BB_1} = 1\overrightarrow{BA} + \alpha\beta\overrightarrow{BC};$$

Аналогично,

$$(1 + \alpha)\overrightarrow{CC_1} = 1 \cdot \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB} = 1(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \alpha\overrightarrow{CB} = 1 \cdot \overrightarrow{BA} - (1 + \alpha)\overrightarrow{BC}.$$

Так как, далее,  $1 + \alpha + \alpha\beta = 0$ , то правые части этих равенств совпадают, т. е.  $(1 + \alpha\beta)\overrightarrow{BB_1} = (1 + \alpha)\overrightarrow{CC_1}$ , и потому  $BB_1 \parallel CC_1$ . Аналогично можно убедиться, что  $CC_1 \parallel AA_1$ . Итак, либо три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  имеют общую точку, либо они попарно параллельны.

Следующая теорема, сходная с теоремой Чевы и принадлежащая древнегреческому геометру Менелая, гарантирует принадлежность трех точек одной прямой:

**Теорема 5.** Если точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (рис. 26) выбраны на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  или на их

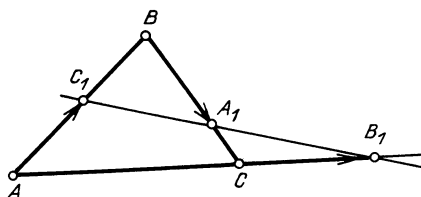


Рис. 26.

продолжениях так, что выполняется «условие Менелая»:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1,$$

то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.

Обратите внимание на то, что условие Менелая лишь знаком отличается от условия Чевы.

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы Чевы, введем числа  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. (13)). Тогда в силу условия Менелая  $\alpha\beta\gamma = -1$ . Следовательно, каждое из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  отлично от 0 (и от  $-1$ ). Равенства (13) означают, как и прежде, что  $C_1$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $\alpha B$ ; далее,  $A_1$  — центр масс м. т.  $\alpha B$  и  $\alpha\beta C$ ; наконец,  $B_1$  — центр масс м. т.  $\alpha\beta C$  и  $\alpha\beta\gamma A$ . т. е. (в силу условия Менелая)  $B_1$  — центр масс м. т.  $\alpha\beta C$  и  $(-1)A$ . Следовательно, при любом выборе точки  $Q$

$$\begin{aligned}(1 + \alpha) \overrightarrow{QC_1} &= 1 \cdot \overrightarrow{QA} + \alpha \overrightarrow{QB}, \\ (\alpha + \alpha\beta) \overrightarrow{QA_1} &= \alpha \overrightarrow{QB} + \alpha\beta \overrightarrow{QC}, \\ (\alpha\beta - 1) \overrightarrow{QB_1} &= \alpha\beta \overrightarrow{QC} + (-1) \overrightarrow{QA}.\end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из суммы двух других, получаем

$$(1 + \alpha)(\overrightarrow{QC_1} - \overrightarrow{QA_1}) + (\alpha\beta - 1)(\overrightarrow{QB_1} - \overrightarrow{QA_1}) = \vec{0},$$

т. е.  $(1 + \alpha) \overrightarrow{A_1C_1} = (1 - \alpha\beta) \overrightarrow{A_1B_1}$ , а это и означает, что точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой.

**Пример 16.** В угол  $B'AC'$  вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 15). Прямая, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , лежащие соответственно на лучах  $OB'$  и  $OC'$ , касается окружности в точке  $T$ , причем вершина угла  $A$  и центр окружности лежат по разные стороны прямой  $BC$ . Пусть  $M$  — точка пересечения прямых  $CP$  и  $BQ$ . Докажем, что три точки  $A, T, M$  лежат на одной прямой.

**Решение.** Выше (см. пример 8 в § 4) мы уже рассмотрели решение этой задачи. Более простое решение получается с помощью теоремы Чевы, согласно которой нам в данном случае следует вычислить выражение

$$u = \frac{\overrightarrow{BT}}{\overrightarrow{TC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}.$$

Введем обозначения:  $x = |AP| = |AQ|$ ,  $y = |BP| = |BT|$ ,  $z = |CT| = |CQ|$ . Тогда

$$u = \left(\frac{y}{z}\right) \left(-\frac{z}{x}\right) \left(-\frac{x}{y}\right) = 1.$$

По теореме Чевы три прямые  $AT, BQ$  и  $CP$  имеют общую точку, т. е. точка  $M$  принадлежит прямой  $AT$ .

#### Задачи

**89.** Дан треугольник  $ABC$ . На продолжениях сторон  $AB$  и  $BC$  выбраны соответственно такие точки  $C_1$  и  $A_1$ , что  $|BC_1| = |AB|$  и  $|CA_1| = |BC|$ . На стороне  $CA$  взята такая точка  $B_1$ , что  $|AB_1| = 4|B_1C|$ . Имеют ли три прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  общую точку?

90. Через точку  $M$ , расположенную внутри треугольника  $ABC$ , проведены три прямые:  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  (точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на контуре треугольника). Известно, что  $|CB_1| = \frac{1}{3}|CA|$ ,  $|CA_1| = \frac{1}{4}|CB|$ . В каком отношении делится отрезок  $AB$  точкой  $C_1$ ?

91. Окружность, вписанная в треугольник  $PQR$ , касается сторон  $QR$ ,  $RP$ ,  $PQ$  соответственно в точках  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Докажите, что три отрезка  $PL$ ,  $QM$ ,  $RN$  имеют общую точку.

92. Окружность касается стороны  $PQ$  треугольника  $PQR$  в точке  $N$  и продолжений сторон  $QR$ ,  $RP$  в точках  $L$ ,  $M$  (вневыписанная окружность). Докажите, что три прямые  $PL$ ,  $QM$ ,  $RN$  имеют общую точку.

93. Через вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$  проведены прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , каждая из которых делит периметр треугольника пополам. а) Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  имеют общую точку  $N$  (она называется точкой Нагеля); б) докажите, что  $N$  является центром масс м. т.  $(p-a)A$ ,  $(p-b)B$ ,  $(p-c)C$ ; в) докажите, что центроид (точка пересечения медиан) треугольника  $ABC$  принадлежит отрезку  $ON$ , где  $O$  — центр вписанной окружности, и делит этот отрезок в отношении  $1:2$ .

94. Дан тетраэдр  $ABCD$ , объем которого равен 1. Плоскость  $\alpha$  встречает ребра  $DA$ ,  $DB$ ,  $CA$ ,  $CB$  соответственно в таких точках  $K$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $M$ , что  $|DK| = 2|KA|$ ,  $|DL| = \frac{1}{2}|LB|$ ,  $|CM| = 3|MB|$ . Вычислите объем четырехугольной пирамиды  $LABMP$ .

95. Из произвольной точки  $M$  окружности опущены перпендикуляры на все стороны (или продолжения сторон) треугольника  $ABC$ , вписанного в эту окружность. Докажите, что основания  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  этих перпендикуляров лежат на одной прямой (прямая Симпсона, рис. 27).

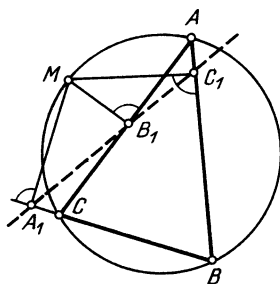


Рис. 27.

96. Докажите теорему, обратную теореме Чевы: если точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  выбраны на сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  или на их продолжениях так, что три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (или параллельны), то выполнено условие Чевы.

97. Докажите теорему, обратную теореме Менелая: если точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , выбранные на сторонах треугольника  $ABC$  или на их продолжениях, лежат на одной прямой (рис. 26), то выполнено условие Менелая.

98. При выполнении условий теоремы Менелая вычислите отношение  $\overrightarrow{A_1B_1} : \overrightarrow{A_1C_1}$  (используя числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , введенные при доказательстве).

99. Пусть при условиях теоремы Чевы прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$

пересекаются в точке  $P$ . Вычислите отношения  $\frac{\overrightarrow{AP}}{A_1P}, \frac{\overrightarrow{BP}}{B_1P}, \frac{\overrightarrow{CP}}{C_1P}$ , используя введенные при доказательстве числа  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**100.** Звенья  $AB, BC, CD, DA$  пространственной замкнутой ломаной  $ABCD$  разделены точками  $M, N, P, Q$  соответственно в отношениях  $m, n, p, q$  (т. е.  $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}$  и т. д.). Докажите, что если  $mnpq = 1$ , то точки  $M, N, P, Q$  лежат в одной плоскости. В каком отношении точка пересечения отрезков  $MP$  и  $NQ$  делит каждый из этих отрезков, если все числа  $m, n, p, q$  положительны?

**101.** Каждое звено замкнутой пространственной ломаной  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  пересекает плоскость  $\alpha$  в одной точке, причем звено  $A_iA_{i+1}$  делится точкой пересечения с плоскостью  $\alpha$  в отношении  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$ ). Найдите отношение  $k_{2n}$ , в котором звено  $A_{2n}A_1$  делится плоскостью  $\alpha$ . Чему равно произведение  $k_1k_2 \dots k_{2n-1}k_{2n}$ ?

## § 7. Координаты центра масс. Теоремы Гюльдена и неравенство Чебышева

XVII век был богат бурными событиями в математике. В этом веке возникли новые математические понятия — интеграл, производная, — которые коренным образом изменили облик этой науки. А еще раньше в работах выдающегося математика и философа Рене Декарта был развит координатный метод, который ознаменовал открытие глубоких связей между алгеброй и геометрией. Отныне геометрические факты стали описываться (в координатах) алгебраическими соотношениями, а алгебраические формулы получили наглядную геометрическую интерпретацию. По словам Энгельса, декартова переменная величина стала поворотным пунктом в развитии математики, внесла в эту науку движение и диалектику и создала условия для развития дифференциального и интегрального исчисления. И, подытожив исследования своих предшественников (Декарта, Ферма, Барроу, Кеплера, Кавальери, Гюйгенса и других), великие математики XVII столетия Ньютон и Лейбниц заложили основы математического анализа.

Координатный метод не только послужил основой, на которой были развиты дифференциальное и интегральное исчисления; сейчас он используется во всех разделах математики и ее приложений. Достаточно сказать о векторных пространствах, которые широко используют координаты и служат тем базисом, на котором сегодня покоятся математика, физика, химия, математическая экономика, теория управления и многие другие области современной науки.

Факты, связанные с центрами масс, которые выше рассматривались чисто геометрически, также могут быть описаны

с помощью координат алгебраическими соотношениями. И это сразу же открывает большие возможности и новые приемы, используемые при решении задач геометрии и алгебры. Такой переход от геометрического описания центров масс к алгебраическому (координатному) и осуществляется в этом параграфе.

Пусть в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат с началом  $O$ , и пусть в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , имеющих соответственно координаты  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ , помещены массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ( $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ ). Обозначим через  $P$  центр масс этих  $n$  м. т. и найдем декартовы координаты  $(x, y, z)$  точки  $P$ . Из определения центра масс следует

$$m\overrightarrow{OP} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}. \quad (14)$$

Если  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы, направленные по осям координат, то  $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\overrightarrow{OA_v} = x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) и из (14) легко получается, что

$$x = \frac{1}{m}(m_1x_1 + \dots + m_nx_n), \quad y = \frac{1}{m}(m_1y_1 + \dots + m_ny_n),$$

$$z = \frac{1}{m}(m_1z_1 + \dots + m_nz_n). \quad (15)$$

Те же формулы справедливы и в случае, если декартова система координат является произвольной (непрямоугольной).

**Пример 17.** Пусть имеется треугольная призма с основанием  $A_1A_2A_3$  (рис. 28). Плоскость  $\alpha$  встречает ее боковые ребра в точках  $A'_1, A'_2, A'_3$ . Ту часть призмы, которая заключена между плоскостью  $\alpha$  и основанием  $A_1A_2A_3$  и плоскостью  $\alpha$ , называют *косоусеченной треугольной призмой*; грани  $A_1A_2A_3$  и  $A'_1A'_2A'_3$  — ее основания, отрезки  $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$  — ее боковые ребра. Аналогично может быть введено понятие косоусеченной  $n$ -угольной призмы.

Представим себе теперь, что точка  $P$  — центр каких-то масс  $m_1, m_2, m_3$  ( $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$ ),

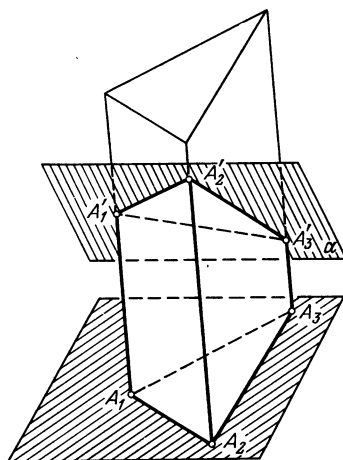


Рис. 28.

помещенных в вершинах треугольника  $A_1A_2A_3$ . Проведем через точку  $P$  прямую, параллельную боковым ребрам косоусеченной призмы, и отметим точку  $P'$  ее встречи с плоскостью треугольника  $A'_1A'_2A'_3$ . Оказывается, что точка  $P'$  будет центром таких же трех масс  $m_1, m_2, m_3$ , помещенных в вершинах треугольника  $A'_1A'_2A'_3$ . Это утверждение можно доказать с помощью формул (15) (см. ниже задачи 103 и 104).

**Следствие.** Пусть в плоскости по одну сторону от прямой  $l$  расположены несколько м. т. одинаковой массы. Тогда центр масс этой системы удален от прямой  $l$  на расстояние, равное среднему арифметическому расстояний этих точек от прямой  $l$ .

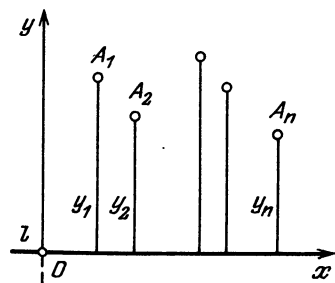


Рис. 29.

В самом деле, примем прямую  $l$  за ось абсцисс, а за ось ординат — какую-либо перпендикулярную ей прямую (считая, что рассматриваемые м. т. лежат в верхней полуплоскости). Тогда ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_n$  рассматриваемых точек равны расстояниям их от прямой  $l$  (рис. 29). По формуле (15) ордината  $y$  центра масс этой системы м. т. (т. е. расстояние центра масс от прямой  $l$ ) равна

$$\frac{1}{nm} (my_1 + my_2 + \dots + my_n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

(где  $m$  — масса каждой м. т.), что и требовалось доказать.

В качестве еще одного применения формул (15) приведем доказательство *теорем Гюльдена* о площади поверхности вращения и объема тела вращения.

Чтобы сформулировать теоремы Гюльдена, нам понадобится понятие центра масс некоторой линии и некоторой плоской фигуры. Интуитивно эти понятия ясны: вдоль некоторой линии  $L$  равномерно (т. е. с одинаковой плотностью) распределена масса, и речь идет о центре масс этой «*непрерывно размазанной*» по линии  $L$  системы материальных точек; аналогично, если  $F$  — плоская фигура, по которой равномерно (т. е. с одинаковой плотностью) распределена масса, то можно говорить о ее центре масс. Математически точное определение получается следующим образом. Мы делим линию  $L$  на  $n$  дуг одинаковой длины и в середине каждого такого кусочка помещаем массу  $M/n$  (где  $M$  — масса всей линии  $L$ ). Получается  $n$  материальных точек (рис. 30), и мы можем найти центр масс

$Z_n$  этой системы. Точка  $Z_n$  лишь приближенно может быть принята за центр масс, распределенных вдоль линии  $L$ , но чем больше  $n$ , тем неточность меньше. Иначе говоря, предел  $Z$  получающихся точек  $Z_n$ , когда  $n$  неограниченно увеличивается, и есть центр масс, распределенных вдоль линии  $L$ , т. е. (по определению) искомый центр масс определяется равенством

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n.$$

Аналогично обстоит дело с центром масс, равномерно распределенных по плоской области.

Теперь можно сформулировать теоремы Гюльдена.

**Первая теорема Гюльдена.** *Площадь поверхности, образованной вращением плоской линии  $L$  вокруг оси  $l$ , лежащей в плоскости этой линии и не пересекающей ее, равна произведению длины линии  $L$  на длину окружности, радиус которой равен расстоянию центра масс, равномерно распределенных вдоль линии  $L$ , от оси вращения.*

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что эта теорема справедлива, если  $L$  является  $n$ -звенной ломаной, у которой все звенья имеют одну и ту же длину  $m$ . Середины звеньев ломаной обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , а расстояния этих точек от прямой  $l$  — через  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (рис. 31, а).

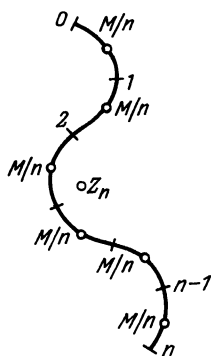


Рис. 30.

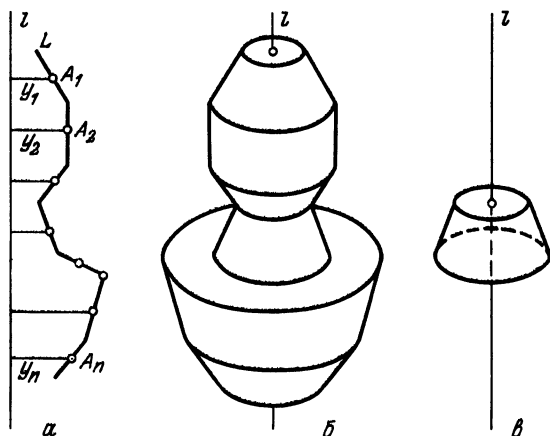


Рис. 31.



При вращении ломаной  $L$  вокруг прямой  $l$  получается поверхность (рис. 31, б), состоящая из  $n$  частей, каждая из которых представляет собой боковую поверхность усеченного конуса или цилиндра (рис. 31, в). Так как боковая поверхность усеченного конуса (или цилиндра) равна произведению длины образующей на длину окружности среднего сечения, то площадь получившейся поверхности вращения равна

$$S = m \cdot 2\pi y_1 + m \cdot 2\pi y_2 + \dots + m \cdot 2\pi y_n = p \cdot 2\pi r,$$

где  $p = mn$  — длина линии  $L$ , а  $r = (y_1 + \dots + y_n)/n$ . Так как  $r$  есть (в силу приведенного выше следствия) расстояние от центра масс, равномерно распределенных вдоль ломаной  $L$ , до оси  $l$ , то полученная формула  $S = p \cdot 2\pi r$  как раз и означает справедливость теоремы Гюльдена в рассматриваемом случае.

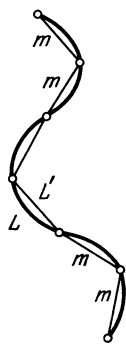


Рис. 32. При вращении ломаной  $L'$  вокруг прямой  $l$  получится поверхность  $\Pi'$ , вписанная в поверхность  $\Pi$ .

Как мы уже знаем, площадь  $S'$  поверхности  $\Pi'$  вычисляется по формуле  $S' = p' \cdot 2\pi r'$ , где  $p'$  — длина ломаной  $L'$ , а  $r'$  — расстояние центра масс, равномерно распределенных вдоль линии  $L'$ , от прямой  $l$ . Будем теперь в этом построении считать, что  $m \rightarrow 0$ . Тогда длина  $p'$  ломаной  $L'$  будет стремиться к длине  $p$  линии  $L$ , площадь  $S'$  поверхности  $\Pi'$  будет стремиться к площади  $S$  поверхности  $\Pi$ , а центр масс ломаной  $L'$  будет приближаться к центру масс линии  $L$ , т. е.  $r'$  будет стремиться к  $r$ . Следовательно, из равенства  $S' = p' \cdot 2\pi r'$  мы в пределе получим соотношение  $S = p \cdot 2\pi r$ .

**Пример 18.** Контур правильного треугольника со стороной  $a$  вращается вокруг прямой, проходящей вне его через конец его стороны под острым углом  $\alpha$  к этой стороне (рис. 33). Определим площадь поверхности вращения.

**Решение.** Длина  $p$  линии  $L$  (т. е. контура треугольника) равна  $3a$ , а расстояние  $r$  от центра масс линии  $L$  (т. е. от центра описанной окружности треугольника) до оси вращения равно

$\frac{a\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$  (рис. 33). Следовательно,

$$S = p \cdot 2\pi r = 2\pi a^2 \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right).$$

Заметим, что решение этого примера можно получить «обычными» школьными средствами (т. е. вычислить боковые поверхности трех конусов, из которых один — усеченный, и сложить их), но такое решение будет гораздо более громоздким.

**Вторая теорема Гюльдена.** Объем тела, образованного вращением плоской фигуры  $F$  вокруг оси  $l$ , лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры  $F$  на длину окружности, радиус которой равен расстоянию центра масс, равномерно распределенных по фигуре  $F$ , от оси вращения.

**Доказательство.** Прежде всего рассмотрим «шайбу», т. е. тело, получающееся при вращении прямоугольника вокруг прямой, которая не пересекает прямоугольник и параллельна двум его сторонам (рис. 34). Объем шайбы  $V$  легко вычислить как разность объемов двух цилиндров. Легко проверить, что для шайбы справедлива вторая теорема Гюльдена, т. е.  $V = S \cdot 2\pi r$ , где  $S$  — площадь вращающегося прямоугольника, а  $r$  — расстояние его центра от оси вращения  $l$ .

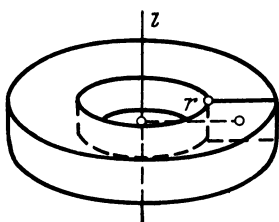


Рис. 34.

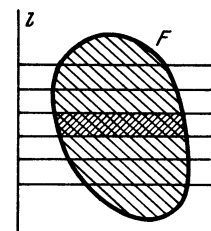


Рис. 35.

Пусть теперь  $F$  — плоская фигура площади  $S$ , а  $l$  — лежащая в ее плоскости прямая, не пересекающая фигуру  $F$ . Проведем прямые, перпендикулярные  $l$  и разбивающие фигуру  $F$  на  $n$  «дольек», каждая из которых имеет одну и ту же площадь  $\frac{1}{n}S$  (рис. 35). Каждая «долька» ограничена двумя отрезками, перпендикулярными  $l$ , и двумя дугами, соединяющими концы

этих отрезков. (Правда, если фигура  $F$  невыпуклая, то могут быть и более сложные дольки; как, например, на рис. 36, однако проводимые рассуждения применимы и к этому случаю.) Заменим эти дуги отрезками, параллельными  $l$ , так, чтобы площадь «дольки» при этом не изменялась (т. е. чтобы «долька» превратилась в прямоугольник той же площади  $\frac{1}{n}S$ ). Прделав это с каждой «долькой», мы превратим  $F$  в «ступенчатую» фигуру  $F'$ , «мало отличающуюся» от фигуры

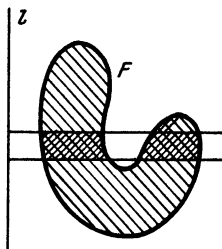


Рис. 36.

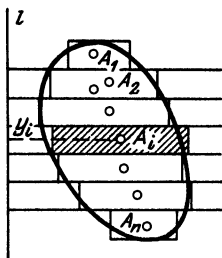


Рис. 37.

$F$ . Фигура  $F'$  составлена из  $n$  прямоугольников, каждый из которых имеет площадь  $\frac{1}{n}S$ . Центры этих прямоугольников обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (рис. 37), а их расстояния от прямой  $l$  — через  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

При вращении фигуры  $F$  вокруг прямой  $l$  получается тело  $T$ , объем которого надо найти, а при вращении фигуры  $F'$  вокруг прямой  $l$  получается тело  $T'$ , мало отличающееся от тела  $T$ . Так как фигура  $F'$  составлена из  $n$  прямоугольников, то тело  $T'$  составлено из  $n$  шайб. Поэтому объем тела  $T'$  равен

$$V' = \frac{1}{n}S \cdot 2\pi y_1 + \frac{1}{n}S \cdot 2\pi y_2 + \dots + \frac{1}{n}S \cdot 2\pi y_n = S \cdot 2\pi r',$$

где  $r' = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)/n$ , т. е.  $r'$  есть (в силу рассмотренного выше следствия) расстояние от центра масс, равномерно распределенных по ступенчатой фигуре  $F'$ , до оси  $l$ .

Будем теперь в этом построении неограниченно увеличивать число  $n$ . Тогда объем  $V'$  тела  $T'$  будет стремиться к объему  $V$  тела  $T$ , а центр масс фигуры  $F'$  будет приближаться к центру масс фигуры  $F$ . Следовательно, из равенства  $V' = S \cdot 2\pi r'$  мы в пределе получим соотношение  $V = S \cdot 2\pi r$ , где  $r$  — расстояние центра масс фигуры  $F$  от оси  $l$  (заметим, что площади фигур

$F$  и  $F'$  одинаковы). Этим и завершается доказательство второй теоремы Гюльдена.

**Замечание.** В приведенных доказательствах теорем Гюльдена не обсуждается, что такое длина произвольной линии, что такое площадь поверхности, объем тела и т. д.<sup>1)</sup>. Ограничимся здесь лишь замечанием о том, что приведенные доказательства являются корректными, если линия  $L$  (или граница фигуры  $F$ ) является *кусочно-гладкой*, т. е. состоит из конечного числа дуг, имеющих непрерывно вращающуюся касательную.

**Пример 19.** Круг радиуса  $a$  вращается вокруг прямой, проходящей в плоскости этого круга на расстоянии  $r > a$  от его центра (рис. 38). Определить, какой объем имеет полученное тело вращения (*тор*).

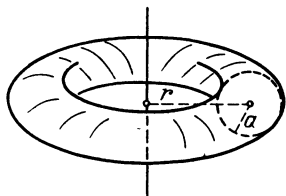


Рис. 38.

**Решение.** Площадь круга  $S = \pi a^2$ . Центр масс, равномерно распределенных по кругу, совпадает с центром круга и находится на расстоянии  $r$  от оси вращения. Следовательно, по второй теореме Гюльдена объем тора равен  $S \cdot 2\pi r = \pi a^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 a^2 r$ .

Полученные выше формулы для координат центра масс могут также быть полезны для решения чисто алгебраических задач. Пусть заданы произвольные положительные числа  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Число

$$x_c = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

называют *взвешенным средним* чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  относительно весов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Формулы (15) показывают, что  $x_c$  можно толковать как координату центра масс  $n$  м. т.  $p_1 A_1, p_2 A_2, \dots, p_n A_n$ , расположенных на числовой оси в точках с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и имеющих положительные массы  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Легко проверить, что этот центр масс обязательно лежит на отрезке, содержащем  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Следовательно, независимо от выбора весов  $p_1, p_2, \dots, p_n$  взвешенное среднее чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  лежит между наименьшим и наибольшим из этих чисел.

<sup>1)</sup> Эти вопросы рассматриваются, например, в первых двух статьях 5-го тома «Энциклопедии элементарной математики» (М.: Наука, 1966), а также в заключительной главе книги: Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. — М.: Просвещение, 1985.

Некоторые упрощения в записях получаются, если сумма весов  $p_1 + p_2 + \dots + p_n$  равна 1: в этом случае

$$x_c = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n,$$

причем по-прежнему число  $x_c$  заключено между наибольшим и наименьшим из чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Интуитивно ясно, что если массу одной из м. т. (или часть этой массы) перенести по оси вправо, то в результате этого центр масс тоже сместится вправо. Это легко усмотреть и непосредственно из (15): если  $m_1 = m'_1 + m_1^*$ ,  $m_1^* > 0$  и  $x_1 < x^*$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} ((m'_1 + m_1^*) x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) < \\ < \frac{1}{m} (m'_1 x_1 + m_1^* x^* + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n). \end{aligned}$$

Это утверждение останется в силе, если операцию переноса массы вправо проделать не один, а несколько раз. Применим это простое соображение к доказательству следующего неравенства П. Л. Чебышева:

**Теорема 6.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — возрастающая последовательность действительных чисел, а  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — убывающая последовательность положительных чисел. Пусть, далее,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  — положительные числа, причем  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n)(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n) \geq \\ \geq \mu_1 a_1 b_1 + \mu_2 a_2 b_2 + \dots + \mu_n a_n b_n, \quad (16) \end{aligned}$$

или короче:

$$\left( \sum_{k=1}^n \mu_k a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \mu_k b_k \right) \geq \sum_{k=1}^n \mu_k a_k b_k.$$

**Доказательство.** Рассмотрим число

$$x = \frac{(\mu_1 b_1) a_1 + (\mu_2 b_2) a_2 + \dots + (\mu_n b_n) a_n}{\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n},$$

т. е. координату центра масс системы м. т.

$$(\mu_1 b_1) A_1, (\mu_2 b_2) A_2, \dots, (\mu_n b_n) A_n,$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — точки оси  $Ox$ , имеющие координаты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Обозначим знаменатель этой дроби через  $b$ , т. е.  $b$  — взвешенное среднее чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  с весами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Рассмотрим теперь другую систему м. т., а именно

$$(\mu_1 b) A_1, (\mu_2 b) A_2, \dots, (\mu_n b) A_n,$$

и пусть  $x'$  — координата ее центра масс. Заметим, что суммарная масса этой системы равна суммарной массе предыдущей системы (напомним, что  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1$ ). Легко видеть, что  $x' > x$ . В самом деле, так как по условию  $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ , то  $b_1 > b > b_n$ . Следовательно, найдется такой номер  $k$ , что  $b_k > b$  и  $b \geq b_{k+1}$ . В точке  $A_1$ , где помещена масса  $\mu_1 b_1$ , надо оставить массу  $\mu_1 b$ , а остальную часть массы, т. е.  $\mu_1 (b_1 - b)$ , перенести «вправо», распределив ее по точкам  $A_{k+1}, \dots, A_n$ ; так же надо поступить с массами, помещенными в точках  $A_2, \dots, A_k$ . Так как суммарная масса системы равна  $b$ , то ее как раз хватит для того, чтобы во всех точках  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) поместить по  $\mu_i b$  единиц массы. Из того, что новая система м. т. получается из прежней перемещением масс вправо, и вытекает справедливость неравенства  $x' > x$ .

Согласно (15) имеем

$$x' = \frac{(\mu_1 b) a_1 + (\mu_2 b) a_2 + \dots + (\mu_n b) a_n}{\mu_1 b + \mu_2 b + \dots + \mu_n b} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n,$$

и потому из соотношения  $x' > x$  вытекает неравенство Чебышева (16).

### Задачи

**102.** В точках  $A_1(0; 0)$ ,  $A_2(0; 1)$ ,  $A_3(1; 0)$  на декартовой плоскости помещены массы 1, 2,  $(-1)$ . Каковы координаты их центра масс?

**103.** Назовем *проекцией* материальной точки  $mA$  на плоскость  $\Pi$  материальную точку  $mA'$ , где  $A'$  — проекция точки  $A$  на плоскость  $\Pi$ . Докажите, что проекция центра масс системы м. т. на какую-либо плоскость  $\Pi$  совпадает с центром масс проекций этих м. т. на плоскость  $\Pi$  (проекция может быть ортогональной или осуществляться параллельно заданной прямой).

**104.** Пользуясь решением задачи 103, докажите приведенное в примере 17 свойство косоусеченной треугольной призмы.

**105.** Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное приведенному в задаче 103, в предположении, что проектирование производится не на плоскость, а на прямую.

**106.** Пусть  $M$  — косоусеченная прямая призма (т. е. боковые ребра перпендикулярны плоскости  $A_1, \dots, A_n$ );  $P'$  и  $P$  — центры масс, равнономерно распределенных по площадям оснований  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  и  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Докажите, что объем призмы равен  $S_{A_1 A_2 \dots A_n} |P'P|$ .

**107.** Найдите поверхность тора, рассмотренного в примере 19.

**108.** Вычислите объем тела, полученного при вращении треугольника в примере 18.

**109.** Параллелограмм  $F$  расположен внутри окружности  $C$  и имеет с ней общий центр. К окружности  $C$  проведены две касательные  $l_1$  и  $l_2$ . Тело  $T_1$  получено вращением параллелограмма  $F$  вокруг прямой  $l_1$ , а тело  $T_2$  получено вращением этого параллелограмма

вокруг  $I_2$ . Одинаковы ли объемы тел  $T_1$  и  $T_2$ ? Одинаковы ли площади их поверхностей?

**110.** Однородная пластинка имеет форму правильного шестиугольника  $ABCDEF$ ,  $O$  — ее центр. Из пластинки вырезан квадрат с диагональю  $OD$ . Вычислите расстояние от точки  $O$  до центра масс оставшейся пластинки. Вычислите объем тела, получающегося при вращении этой пластинки вокруг прямой  $AB$ .

**111.** Квадрат со стороной  $a$  вращается вокруг оси, имеющей с квадратом лишь одну общую точку (вершину квадрата) и составляющей со стороной квадрата угол  $\varphi$  ( $0 < \varphi \leq 45^\circ$ ). Вычислите объем и площадь поверхности образовавшегося тела вращения.

**112.** Прямоугольный треугольник вращается вокруг катета, имеющего длину  $a$ ; длина другого катета равна  $b$ . Вычислите объем получающегося тела вращения (конуса) и выведите отсюда, что центр масс рассматриваемой треугольной пластинки находится на расстоянии  $b/3$  от оси вращения.

**113.** Выведите из результата задачи 112, что центр масс однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан треугольника.

**114.** Сфера радиуса  $r$  пересечена двумя параллельными плоскостями, проходящими на расстоянии  $a$  от ее центра ( $a \leq r$ ). Зная, что поверхность сферы, заключенная между этими плоскостями, имеет площадь  $4\pi ra$ , найдите положение центра масс, равномерно распределенных вдоль дуги окружности, вращением которой получена рассматриваемая часть сферы.

**115.** Известный астроном Иоганн Кеплер в своей «Новой стереометрии винных бочек» (1615 г.) вычислил поверхности и объемы некоторых тел вращения. Пусть хорда  $AB$  делит круг на две неравные части. При вращении меньшей из этих частей вокруг прямой  $AB$  образуется тело, которое Кеплер назвал «лимоном», а при вращении большей части — тело, названное им «яблоком». Зная, что высота «лимона» (т. е. длина отрезка  $AB$ ) равна  $2a$ , а его толщина в наиболее широком месте равна  $2b$ , вычислите площадь поверхности «лимона». Решите аналогичную задачу для «яблока».

**116.** Объем части шара, заключенной между двумя плоскостями, рассмотренными в задаче 114, равен  $2\pi \left( ar^2 - \frac{a^3}{3} \right)$ . Зная это, найдите положение центра масс, равномерно распределенных по той части круга, вращением которой получается рассматриваемая часть шара.

**117.** Однородная пластинка, имеющая форму кругового сегмента, меньшего полукруга, стягивается хордой длины  $h$ ; площадь пластинки равна  $S$ . Где находится центр масс пластинки?

**118.** Вычислите объем «лимона» и «яблока», о которых шла речь в задаче 115.

**119.** Угол кругового сектора радиуса  $r$  имеет величину  $2\alpha$  (радиан). Найдите положение центра масс этого сектора.

**120.** Сторона  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  служит диаметром полукруга (расположенного вне прямоугольника). При вращении пластинки, составленной из прямоугольника и полукруга, вокруг

прямой  $CD$  образуется некоторое тело («бочонок»). Вычислите его объем и площадь поверхности, если  $|AD| = a$ ,  $|AB| = 4a$ .

121. Вычислите объем и площадь поверхности «бочонка», получающегося, если в задаче 120 вместо полукруга взять сегмент с хордой длины  $4a$  и площадью  $S$ .

122. Пусть  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ . Проверьте неравенства

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

123. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — две возрастающие конечные последовательности положительных чисел, и пусть все числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  положительны и  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1$ . Докажите справедливость следующего неравенства П. Л. Чебышева:

$$(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n)(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) \leq \mu_1 a_1 b_1 + \dots + \mu_n a_n b_n,$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда  $a_1 = \dots = a_n$ ,  $b_1 = \dots = b_n$ .

124. Имеются четыре положительных числа  $x, y, z, t$ , сумма которых равна 1. Выясните, какое наименьшее значение может иметь функция

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

125. Докажите, что если  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника  $ABC$ , а  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы, то

$$a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + c \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} (a + b + c).$$

## § 8. Комплексные массы

В этом параграфе предполагается, что читатель знаком с *комплексными числами*. Мы совершим здесь еще одно обобщение, предполагая, что массы рассматриваемых материальных точек могут принимать не только отрицательные значения, но и, более того, не быть действительными, т. е. могут принимать произвольные комплексные значения.

Выше мы уже видели, что отрицательные массы могут оказаться весьма полезными при решении геометрических задач. Нетрудно привести соображения, показывающие, что отрицательные массы могут иметь и прямое механическое истолкование. Вообразим себе однородную жидкую или газообразную среду (например, сосуд, наполненный водой), в которой находятся небольшие шарики («материальные точки»), соединенные друг с другом жесткими невесомыми стержнями. Пусть шарик, расположенный в точке  $A_1$ , имеет объем  $v_1$  и массу  $m_1$ . Тогда на него действует направленная вниз сила



тяжести, имеющая величину  $m_1 g$ , и архимедова выталкивающая сила, которая имеет величину  $(\rho v_1) g$  (где  $\rho$  — плотность жидкости) и направлена вверх — противоположно силе тяжести (рис. 39). Иначе говоря, сила тяжести равна  $(m_1 g) e$ , а выталкивающая сила равна  $-(\rho v_1 g) e$ , где  $e$  — единичный вектор, направленный вниз. В результате оказывается, что на шарик  $A_1$  действует сила  $(m_1 g) e - (\rho v_1 g) e = (m_1 - \rho v_1) g e$ . Это можно условно истолковать так (отбросив среду), как будто шарик находится в вакууме и имеет «приведенную» массу  $m_1 - \rho v_1$ ; тогда как раз на него будет действовать сила тяжести, равная  $(m_1 - \rho v_1) g e$ . Если при этом  $\rho v_1 < m_1$  (шарик имеет большую плотность, чем жидкая среда), то «приведенная» масса  $m_1 - \rho v_1$  положительна; если же  $\rho v_1 > m_1$  (шарик рыхлый, т. е. его плотность меньше плотности среды), то «приведенная» масса  $m_1 - \rho v_1$  отрицательна. Таким образом, при нахождении центра «приведенных» масс надо учитывать, что они могут быть как положительными, так и отрицательными.

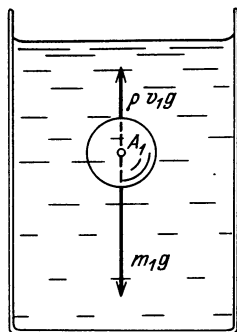


Рис. 39.

Например, если в воду помещены деревянный и стальной шарики, насаженные на невесомый стержень, то «приведенная» масса первого из них отрицательна, а второго — положительна. Поэтому центр  $Z$  этих масс («приведенных») находится в не отрезка, концами которого являются шарики. Если укрепить стержень шарнирно в этой точке  $Z$ , то вся система останется в равновесии (рис. 40). Это и понятно: результирующая сила,

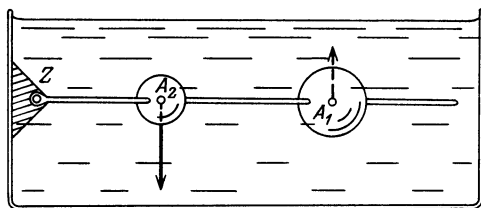


Рис. 40.

действующая на деревянный шарик, направлена в верх (шарик всплывает), а действующая на стальной шарик — вниз (он тонет), и поскольку — по правилу рычага — моменты (т. е. произведения плеч на соответствующие «приведенные» массы)

равны по величине и противоположно направлены, система останется в равновесии.

Аналогичную интерпретацию «отрицательных масс» можно дать с помощью понятий электростатики. Пусть в однородном электростатическом поле (скажем, между двумя параллельно расположенными и противоположно заряженными металлическими пластинами) расположены  $k$  заряженных шариков. Будем считать, что вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  направлен в рассматриваемой области вертикально вниз и имеет постоянную величину  $E$ , а взятые  $k$  шаров имеют соответственно заряды  $e_1, e_2, \dots, e_k$  (положительные или отрицательные) и расположены в точках  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Тогда на шар с зарядом  $e_i$  действует сила  $e_i \mathbf{E}$  (приложенная в точке  $A_i$  и направленная вниз при  $e_i > 0$  и вверх в противном случае). Считая, что «суммарный заряд»  $e_1 + e_2 + \dots + e_k$  отличен от нуля, мы найдем, что равнодействующая рассмотренных сил имеет своей точкой приложения центр масс  $Z$  материальных точек  $(e_1 E) A_1, \dots, (e_k E) A_k$  (или, что то же самое, центр масс м. т.  $e_1 A_1, \dots, e_k A_k$ ). Если эту систему зарядов, жестко соединенных между собой стержнями-изоляторами, закрепить шарнирно в точке  $Z$ , успокоить и затем отпустить, то вся система останется в покое (шары и стержни считаются невесомыми). Например, в случае двух зарядов  $e_1, e_2$ , помещенных в точках  $A_1, A_2$ , их центр масс (или лучше в данном случае сказать «центр зарядов») лежит на отрезке  $A_1 A_2$ , если заряды имеют одинаковые знаки, и вне этого отрезка (но на прямой  $A_1 A_2$ ), если один из зарядов положительный, а другой отрицательный.

Эти примеры показывают, что отрицательные массы не только являются идеализацией, удобной для решения геометрических задач, но и могут иметь прямой механический смысл. А как же быть с мнимыми массами? Можно ли дать им какое-нибудь физическое оправдание? Реальную модель на сегодняшний день указать трудно, но можно описать гипотетическую ситуацию, которая сейчас воспринимается лишь как довольно фантастическая модель, но может быть (кто знает?) будет недалеко от завтрашних физических воззрений.

В специальной теории относительности имеется формула

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Она означает, что частица, имеющая массу покоя  $m_0$ , обладает в инерциальной системе отсчета, относительно которой частица движется со скоростью  $v$  (рис. 41), массой  $m$ , отличной от  $m_0$  и вычисляемой по этой формуле. Согласно теории относительности, частица, имеющая отличную от нуля массу покоя  $m_0$ ,

в любой системе отсчета наблюдается как движущаяся со скоростью, меньшей скорости света  $c$ . Поэтому число  $v^2/c^2$  меньше единицы, разность  $1 - v^2/c^2$  положительна, и поэтому масса  $m$  выражается положительным числом, которое больше

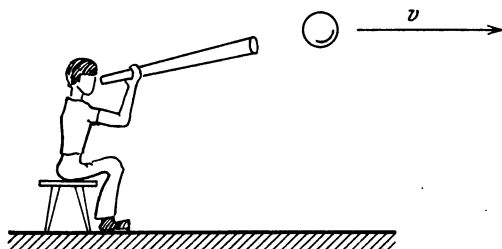


Рис. 41.

$m_0$  (и является тем большим, чем ближе скорость движения  $v$  к скорости света  $c$ ).

Если бы некоторая частица двигалась со скоростью, большей  $c$ , то частное  $v/c$  было бы больше единицы, и потому число  $1 - v^2/c^2$ , стоящее в знаменателе под знаком корня, было бы отрицательным, т. е. в знаменателе стояло бы мнимое число. Это можно рассматривать как косвенное подтверждение того, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Такой вывод, несомненно, можно признать справедливым, если (как это обычно делается) предполагать, что масса покоя  $m_0$  положительна. Однако если предположить, что масса покоя некоторой частицы является чисто мнимой (такие гипотетические частицы называют *тахionsами*), то все будет наоборот: при движении с досветовой скоростью ( $v < c$ ) в числителе будет стоять мнимое, а в знаменателе действительное число, так что вся дробь будет мнимой, а при движении со сверхсветовой скоростью и числитель, и знаменатель будут мнимыми, так что вся дробь будет действительной. Иначе говоря, тахион не может наблюдаться в покое (или при движении с досветовой скоростью), а может иметь реальный смысл при движении лишь со сверхсветовой скоростью. И хотя сегодня о существовании тахионов никто еще всерьез не говорит, но, возможно, когда-нибудь эти частицы (обладающие мнимой массой покоя) обретут право на существование.

Разумеется, эти соображения приведены здесь не как доказательство целесообразности рассмотрения материальных точек с комплексными массами. Для нас здесь такие «матери-

альные точки» будут служить лишь средством решения геометрических задач.

Напомним, что каждой точке  $(x; y)$  координатной плоскости соответствует некоторое комплексное число — ее *комплексная координата*  $x + iy$ . Нам будет удобно придерживаться следующих соглашений: точку и ее комплексную координату будем обозначать одной и той же буквой, но точку — прописной, а ее координату — строчной: комплексные координаты точек  $Z, A, A_3, C_2$  будем (не делая дополнительных оговорок) обозначать соответственно через  $z, a, a_3, c_2$ . Например, если точка  $A$  имеет координаты  $(2; -3)$ , то  $a = 2 - 3i$ .

Каждый вектор  $\overrightarrow{C_1 C_2}$  на координатной плоскости может быть задан некоторым комплексным числом  $c = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — проекции вектора  $\overrightarrow{C_1 C_2}$  соответственно на ось абсцисс и ось ординат; число  $c = a + bi$  будем называть *комплексной координатой* вектора  $\overrightarrow{C_1 C_2}$ . Комплексная координата  $c$  вектора  $\overrightarrow{C_1 C_2}$  выражается через комплексные координаты точек  $C_1$  и  $C_2$  по формуле  $c = c_2 - c_1$ .

Напомним, что каждое комплексное число  $z$  можно записать в *тригонометрической форме*:  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , где  $\rho$  — *модуль* комплексного числа  $z$  (т. е. длина соответствующего вектора), а  $\theta$  — *аргумент* этого комплексного числа (т. е. угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором, изображающим комплексное число  $z$ , см. рис. 42). В математике существует замечательная формула Эйлера  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ , показывающая глубокую связь показательной и тригонометрических функций. В силу этой формулы комплексное число  $z$ , имеющее модуль  $\rho$  и аргумент  $\theta$ , можно также записать в *показательной форме*:  $z = \rho e^{i\theta}$ .

Из формулы Эйлера легко вывести, что если  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $z' = \rho' e^{i\theta'}$ , то число  $\rho\rho'$  является модулем комплексного числа  $zz'$ , а число  $\theta + \theta'$  — его аргументом, т. е.  $\rho e^{i\theta} \cdot \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$ . Иными словами, вектор, изображающий комплексное число

$zz'$ , имеет длину в  $\rho$  раз большую, чем вектор, изображающий  $z'$ , а угол между вектором  $z'$  и вектором  $zz'$  равен  $\theta$  (рис. 43).

Это означает, что при умножении комплексного числа  $z'$  на число  $z$  (имеющее модуль  $\rho$  и аргумент  $\theta$ ) вектор, изображающий  $z'$ , растягивается с коэффициентом  $\rho$  и поворачивается на угол  $\theta$  — это и дает вектор, изображающий  $zz'$ . Иначе говоря, вектор,

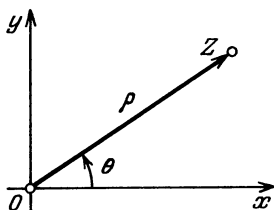


Рис. 42.

изображающий  $zz'$ , получается из вектора, изображающего  $z'$ , при помощи преобразования  $R_\theta \cdot \Gamma_\rho$ , где  $\Gamma_\rho$  — гомотетия с коэффициентом  $\rho$ , а  $R_\theta$  — поворот на угол  $\theta$  (т. е. поворот на угол  $|\theta|$ , совершаемый против часовой стрелки при  $\theta > 0$  и по часовой стрелке при  $\theta < 0$ ).

Например, запись  $c_2 - z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}(c_1 - z)$  означает, что вектор  $\overrightarrow{ZC_2}$  можно получить из вектора  $\overrightarrow{ZC_1}$  композицией двух пре-

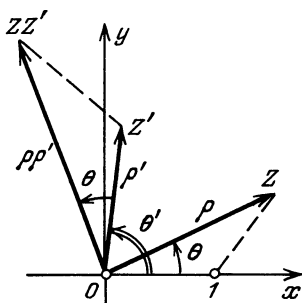


Рис. 43.

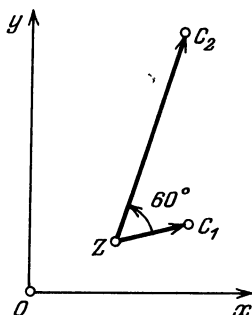


Рис. 44.

образований: гомотетии с коэффициентом 3 и поворота (вокруг точки  $Z$ ) на угол  $60^\circ$  против часовой стрелки (рис. 44).

Пусть теперь  $A_1, \dots, A_n$  — некоторые точки координатной плоскости и  $a_1, \dots, a_n$  — их комплексные координаты. Пусть, далее,  $m_1, \dots, m_n$  — некоторые комплексные числа с ненулевой суммой («комплексные массы»). Рассмотрим систему «комплексных» материальных точек  $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$  и центром масс этой системы будем называть точку  $Z$ , комплексная координата которой удовлетворяет условию  $m_1(a_1 - z) + \dots + m_n(a_n - z) = 0$  (ср. (7)), т. е.

$$z = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (17)$$

(сравните эту формулу с соотношениями (15) или (8)).

Легко доказать, что для центра масс системы комплексных материальных точек сохраняются (с соответствующими видоизменениями) рассмотренные в § 1–3 основные свойства центров масс. Сформулируем их:

I. Каждая система комплексных м. т. с ненулевой суммарной массой имеет однозначно определенный центр масс.

II. Центр масс  $Z$  двух комплексных м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  с ненулевой суммарной массой удовлетворяет «архимедову правилу

рычага» в следующей форме:  $|m_1| |a_1 - z| = |m_2| |a_2 - z|$ , т. е.  $|m_1| d_1 = |m_2| d_2$ , где  $d_1 = |a_1 - z|$  и  $d_2 = |a_2 - z|$  — расстояния центра масс  $Z$  от точек  $A_1$  и  $A_2$ .

III. Положение центра масс всей системы  $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$  не изменится, если суммарную массу комплексных м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$  перенести в их центр масс ( $k < n$ ;  $m_1 + \dots + m_k \neq 0$ ;  $m_1 + \dots + m_n \neq 0$ ).

Доказательства остаются прежними. Например, в случае двух комплексных м. т.  $m_1 A_1$  и  $m_2 A_2$  мы имеем  $m_1 (a_1 - z) + m_2 (a_2 - z) = 0$ , т. е.  $m_1 (a_1 - z) = -m_2 (a_2 - z)$ , откуда и вытекает равенство  $|m_1| |a_1 - z| = |m_2| |a_2 - z|$ . Заметим, однако, что центр масс двух комплексных м. т., вообще говоря, не лежит на прямой, соединяющей эти точки (см. ниже задачи 127–129).

Отметим еще, что умножение всех масс системы комплексных м. т. на одно и то же комплексное число, отличное от нуля, не влияет на положение центра масс системы (это непосредственно вытекает из формулы (17)).

**Пример 20.** На сторонах  $\triangle A_1 A_2 A_3$ , как на основаниях, построены равнобедренные треугольники  $A_1 B_3 A_2$ ,  $A_2 B_1 A_3$ ,  $A_3 B_2 A_1$  с одним и тем же углом  $\varphi$  при вершинах  $B_1, B_2, B_3$ , не имеющие с  $\triangle A_1 A_2 A_3$  общих внутренних точек. Докажем, что точка пересечения медиан  $\triangle B_1 B_2 B_3$  совпадает с точкой пересечения медиан  $\triangle A_1 A_2 A_3$  (рис. 45).

**Решение.** Вектор  $\overrightarrow{B_3 A_1}$  может быть получен из вектора  $\overrightarrow{B_3 A_2}$  поворотом на угол  $\varphi$ . Поэтому  $a_1 - b_3 = e^{i\varphi} (a_2 - b_3)$ , т. е.  $1(a_1 - b_3) + (-e^{i\varphi})(a_2 - b_3) = 0$ . Значит,  $B_3$  — центр масс двух м. т.:  $1A_1$  и  $(-e^{i\varphi})A_2$ .

Аналогично,  $B_1$  — центр масс м. т.  $1A_2$  и  $(-e^{i\varphi})A_3$ , а  $B_2$  — центр масс м. т.  $1A_3$  и  $(-e^{i\varphi})A_1$ . Рассмотрим систему всех шести м. т. и обозначим через  $Z$  ее центр масс (суммарная масса этой системы равна  $3(1 - e^{i\varphi}) \neq 0$ ). Применяя формулу (17) и производя двумя способами группировку, находим

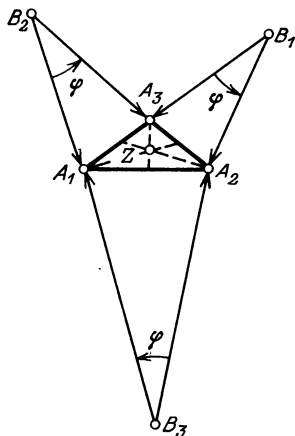


Рис. 45.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1a_1 + (-e^{i\varphi})a_2) + (1a_2 + (-e^{i\varphi})a_3) + (1a_3 + (-e^{i\varphi})a_1)}{3(1 - e^{i\varphi})} = \\ &= \frac{1b_1 + 1b_2 + 1b_3}{3}; \end{aligned}$$

$$z = \frac{(1 - e^{i\varphi})a_1 + (1 - e^{i\varphi})a_2 + (1 - e^{i\varphi})a_3}{3(1 - e^{i\varphi})} = \frac{1a_1 + 1a_2 + 1a_3}{3}.$$

Отсюда ясно, что центроиды (т. е. точки пересечения медиан) обоих треугольников  $B_1B_2B_3$  и  $A_1A_2A_3$  совпадают с точкой  $Z$ .

Заметим, что доказанное утверждение остается в силе, если на сторонах треугольника  $A_1A_2A_3$  строятся не равнобедренные, а подобные и одинаково ориентированные треугольники.

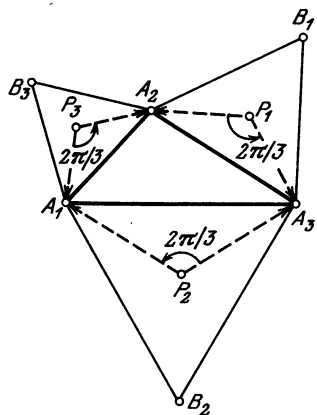


Рис. 46.

**Пример 21.** На сторонах произвольного треугольника  $A_1A_2A_3$ , как на основаниях, построены равносторонние треугольники  $A_1B_3A_2$ ,  $A_2B_1A_3$ ,  $A_3B_2A_1$ , не имеющие с треугольником  $A_1A_2A_3$  общих внутренних точек. В этих треугольниках отмечены их центры  $P_3$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . Докажем, что  $\triangle P_1P_2P_3$  — также равносторонний.

**Решение.** Вектор  $\vec{P_3A_2}$  можно получить из  $\vec{P_3A_1}$  поворотом на угол  $2\pi/3$  (рис. 46). Поэтому, полагая  $c = e^{(i\frac{2\pi}{3})}$ , имеем

$$1(a_2 - p_3) + (-c)(a_1 - p_3) = 0,$$

значит,  $P_3$  — центр масс м.т.  $1A_2$  и  $(-c)A_1$ . Аналогично,  $P_1$  — центр масс м.т.  $1A_3$  и  $(-c)A_2$ ; далее,  $P_2$  — центр масс м.т.  $1A_1$  и  $(-c)A_3$ , а значит,  $P_2$  — центр масс м.т.  $(-1)A_3$  и  $(1/c)A_1$ . Рассмотрим теперь четыре м.т.  $1A_3$ ,  $(-c)A_2$ ,  $(-1)A_3$ ,  $(1/c)A_1$ , и пусть  $Z$  — их центр масс (суммарная масса этой системы равна  $-c + (1/c) \neq 0$ ). Произведем группировку масс:

$$\begin{aligned} (-c + 1/c)z &= ((1/c)a_1 + (-c)a_2) + (1a_3 + (-1)a_3) = \\ &= (1/c)a_1 + (-c)a_2. \end{aligned}$$

Из этого видно, что  $Z$  — центр масс м.т.  $(1/c)A_1$  и  $(-c)A_2$ , а следовательно, и двух м.т.  $1A_2$  и  $(-c)A_1$  (поскольку  $c^3 = 1$ ).

Следовательно,  $Z = P_3$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} (-c + 1/c)z &= (1a_3 + (-c)a_2) + ((-1)a_3 + (1/c)a_1) = \\ &= (1 - c)p_1 + (-1 + 1/c)p_2. \end{aligned}$$

Умножая для упрощения на  $\frac{c}{1 - c}$  и учитывая, что  $Z = P_3$ ,

перепишем это равенство в виде  $(1 + c)p_3 = cp_1 + p_2$ , т. е.  $(-c)(p_1 - p_3) = p_2 - p_3$ . Так как  $-c = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ , то вектор  $\overrightarrow{P_3P_2}$  можно получить из вектора  $\overrightarrow{P_3P_1}$  поворотом на  $-\pi/3$ . Следовательно,  $\triangle P_3P_1P_2$  — правильный.

**Пример 22.** На сторонах треугольника  $ABC$  построены вне его квадраты  $ABMK$  и  $BCLN$ . Докажем, что медиана  $BD$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна отрезку  $MN$  и имеет вдвое меньшую длину, чем этот отрезок (рис. 47).

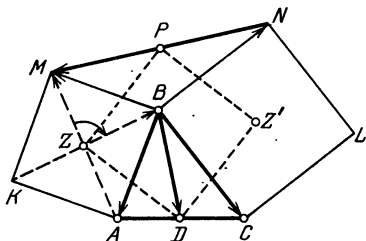


Рис. 47.

**Решение.** Так как векторы  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BM}$  имеют одинаковую длину и перпендикулярны, то  $B$  — центр масс м. т.  $1A$  и  $-iM$  (см. задачу 127):

$$1(a - b) - i(m - b) = 0. \quad (18)$$

Аналогично,  $B$  — центр масс м. т.  $1C$  и  $iN$ :

$$1(c - b) + i(n - b) = 0. \quad (19)$$

Складывая равенства (18) и (19) и деля результат пополам, находим

$$\frac{(a - b) + (c - b)}{2} = \frac{i}{2}(m - n). \quad (20)$$

Это означает, что вектор  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ , т. е. вектор  $\overrightarrow{BD}$ , получается из вектора  $\overrightarrow{NM}$  уменьшением его длины вдвое и поворотом на угол  $\pi/2$ , что и требовалось доказать.

**Пример 23.** Докажем, что в условиях примера 22 центры квадратов  $ABMK$  и  $BCLN$ , середина отрезка  $MN$  и точка  $D$  являются четырьмя вершинами квадрата.

**Решение.** Обозначим через  $P$  середину отрезка  $MN$ . Тогда равенство (20) переписывается в виде  $d - b = i(m - p)$ . Прибавляя к этому равенству соотношение  $1(b - z) + i(m - z) = 0$  (означающее, что центр  $Z$  квадрата  $ABMK$  является центром масс м. т.  $1B$  и  $iM$ , т. е.  $\overrightarrow{ZB}$  получается из  $\overrightarrow{ZM}$  поворотом на  $-90^\circ$ ), получаем  $1(d - z) + i(p - z) = 0$ . Это означает, что  $Z$  — центр масс м. т.  $1D$  и  $iP$ , и потому отрезки  $ZD$  и  $ZP$  имеют одинаковую длину и перпендикулярны, т. е.  $DPZ$  — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной  $Z$ . Аналогично, обозначая через  $Z'$  центр квадрата  $BCLN$ , мы найдем, что  $DPZ'$  — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной  $Z'$ . Следовательно,  $DZPZ'$  — квадрат.



### Задачи

126. Пусть  $m_1 A_1$  и  $m_2 A_2$  — комплексные м. т. и  $Z$  — их центр масс ( $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 \neq 0$ ;  $m_1 + m_2 \neq 0$ ). Докажите, что аргумент комплексного числа  $-m_1/m_2$  представляет собой угол, на который надо повернуть вектор  $\vec{ZA}_1$ , чтобы он стал одинаково направленным с вектором  $\vec{ZA}_2$ .

127. Пусть  $Z$  — центр масс м. т.  $1A_1$  и  $e^{i\varphi}A_2$ . Докажите, что при повороте вокруг точки  $Z$  на угол  $\pi - \varphi$  точка  $A_1$  переходит в точку  $A_2$ .

128. Пусть  $Z$  — центр масс м. т.  $1A_1$  и  $re^{i\varphi}A_2$ . Докажите, что точка  $A_1$  переходит в  $A_2$  при преобразовании  $\Gamma_{1/\rho} \circ R_{\pi-\varphi}$ , где  $\Gamma_{1/\rho}$  — гомотетия с центром  $Z$  и коэффициентом  $1/\rho$ , а  $R_{\pi-\varphi}$  — поворот вокруг точки  $Z$  на угол  $\pi - \varphi$ .

129. Докажите, что если  $A_1$ ,  $A_2$  и  $Z$  — три различные точки координатной плоскости, то существует такая комплексная масса  $m \neq -1$ , что  $Z$  будет центром масс м. т.  $1A_1$  и  $mA_2$ .

130. Докажите, что если  $A_1$  и  $A_2$  — две различные точки координатной плоскости, то для любой точки  $Z$  этой плоскости существуют однозначно определенные комплексные массы  $m_1$  и  $m_2$ , для которых  $m_1 + m_2 = 1$  и  $Z$  — центр масс м. т.  $m_1 A_1$  и  $m_2 A_2$ .

131. Пусть  $Z_k$  — центр масс м. т.  $1A_1$  и  $m_k A_2$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Докажите, что если все комплексные числа  $m_1, m_2, \dots, m_k$  имеют один и тот же аргумент  $\varphi$ , то точки  $A_1, A_2, Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  лежат на одной окружности.

132. Пусть  $m \neq 0$ ,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  — действительные числа и  $Z_k$  — центр масс м. т.  $mA_1$  и  $e^{i\varphi_k}A_2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Докажите, что все точки  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  лежат на одной окружности или на одной прямой. При каком  $m$  все эти точки лежат на оси симметрии точек  $A_1$  и  $A_2$ ?

133. Докажите, что если  $Z$  — центр масс комплексных м. т.  $m_1 A_1$  и  $m_2 A_2$  и  $\frac{|m_1|}{|m_2|} = h > 0$ , то точка  $Z$  лежит на окружности, диаметром которой служит отрезок  $M_1 M_2$ , где  $M_1$  — центр масс м. т.  $hA_1$  и  $1A_2$ , а  $M_2$  — центр масс м. т.  $hA_1$  и  $(-1)A_2$ .

134. При условиях примера 22 докажите, что если  $Q$  — четвертая вершина параллелограмма  $MBNQ$ , то  $Z$  — центр масс м. т.  $1C$  и  $iQ$ , а  $Z'$  — центр масс м. т.  $1Q$  и  $iA$  (где  $Z, Z'$  — центры квадратов  $ABMK$  и  $BCLN$ ).

135. На сторонах параллелограмма построены вне его четыре квадрата. Докажите, что центры этих квадратов служат вершинами еще одного квадрата.

136. В вершинах треугольника  $A_1 A_2 A_3$  помещены ненулевые комплексные массы  $m_1, m_2, m_3$  с ненулевой суммой, причем  $m_1 + m_2 = 0$ . Докажите, что если  $Z$  — центр масс этих трех м. т., то угол между векторами  $\vec{A_1 A_2}$  и  $\vec{A_3 Z}$  равен  $\arg(-m_3/m_1)$ .

## МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

«...Рассматриваются две замечательные теоремы, которые со времен Лагранжа были установлены различными геометрами».

Г. Дарбу

### § 9. Формулы Лагранжа и Якоби. Применения к геометрии

Понятие момента инерции было введено в XVIII в. в связи с изучением вращательного движения тел. И удивительным образом оказалось, что это понятие и его свойства важны не только для механики, но и для математики: привлечение этого понятия в ряде случаев позволяет найти подход к решению задач геометрии, алгебры и математического анализа.

В механике обычно рассматривают момент инерции тела (или системы материальных точек) относительно оси. В геометрических приложениях используется главным образом полярный момент инерции, т. е. момент инерции относительно некоторой точки. При этом для геометрических задач удобнее не ограничиваться лишь случаем положительных масс, а сразу вести рассуждения для случая произвольных действительных масс (с ненулевой суммой).

Пусть имеется система материальных точек

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n. \quad (21)$$

Моментом инерции системы (21) относительно точки  $S$  Эйлер назвал следующую величину:

$$J_S = m_1 |SA_1|^2 + m_2 |SA_2|^2 + \dots + m_n |SA_n|^2. \quad (22)$$

**Пример 24.** Пусть  $ABCD$  — квадрат (рис. 48) со стороной  $2a$ , в каждой вершине которого помещена масса 1; через  $S$  обозначим середину стороны  $AB$ , а через  $Z$  — центр квадрата. Вычислим моменты инерции  $J_S$  и  $J_Z$ .

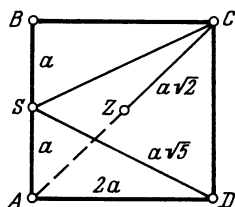


Рис. 48.

**Решение.**

$$J_S = 1 \cdot |SA|^2 + 1 \cdot |SB|^2 + 1 \cdot |SC|^2 + 1 \cdot |SD|^2 = \\ = 2a^2 + 2(a\sqrt{5})^2 = 12a^2; \\ J_Z = 1 \cdot |ZA|^2 + 1 \cdot |ZB|^2 + 1 \cdot |ZC|^2 + 1 \cdot |ZD|^2 = 4(a\sqrt{2})^2 = 8a^2.$$

Следующая формула, установленная выдающимся французским математиком Лагранжем, выражает связь между моментом инерции  $J_S$  системы материальных точек относительно произвольной точки  $S$  и моментом инерции  $J_Z$  той же системы относительно ее центра масс  $Z$ .

**Теорема 7.** Пусть  $Z$  — центр масс системы (21). Тогда для произвольной точки  $S$  справедлива формула

$$J_S = J_Z + m |SZ|^2, \quad (23)$$

где  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

**Доказательство.** Имеем

$$J_S = \sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{SA_k}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (\overrightarrow{SZ} + \overrightarrow{ZA_k})^2 = \\ = \sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{ZA_k}^2 + \left( \sum_{k=1}^n m_k \right) \overrightarrow{SZ}^2 + 2\overrightarrow{SZ} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{ZA_k}.$$

Так как  $Z$  — центр масс системы (21), то  $\sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{ZA_k} = \vec{0}$ . Это и дает формулу (23).

Другая формула, установленная немецким математиком К. Г. Якоби<sup>1)</sup>, выражает момент инерции  $J_Z$  системы материальных точек (с ненулевой суммой масс) относительно ее центра масс  $Z$  через массы этих материальных точек и взаимные расстояния между ними.

**Теорема 8.** Пусть  $Z$  — центр масс системы (21) с ненулевой суммарной массой  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Тогда

$$J_Z = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j r_{ij}^2, \quad \text{где } r_{ij} = |A_i A_j|. \quad (24)$$

**Доказательство** проведем при  $n = 3$  (в общем случае вычисления аналогичны). Для момента инерции системы (21) относительно точки  $A_1$  имеем, согласно теореме Лагранжа,

$$J_{A_1} = J_Z + m |A_1 Z|^2,$$

<sup>1)</sup> Эта формула была установлена независимо различными математиками (Лагранж, Пуансо, Якоби и др.). Наиболее интересные приложения ее (в космогонии) нашел Якоби.

откуда после умножения на  $m_1$  получаем

$$m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 = m_1 J_Z + m m_1 |A_1 Z|^2.$$

Аналогично получим (рассматривая моменты инерции относительно точек  $A_2, A_3$ )

$$m_2 m_1 r_{21}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 = m_2 J_Z + m m_2 |A_2 Z|^2,$$

$$m_3 m_1 r_{31}^2 + m_3 m_2 r_{32}^2 = m_3 J_Z + m m_3 |A_3 Z|^2.$$

Складывая почленно эти равенства, получим слева сумму всевозможных произведений вида  $m_i m_j r_{ij}^2$ , где  $i \neq j$ . При этом каждое такое произведение встретится нам два раза; например, в предпоследнем равенстве имеется слагаемое  $m_2 m_3 r_{23}^2$ , а в последнем — слагаемое  $m_3 m_2 r_{32}^2$  (совпадающее с  $m_2 m_3 r_{23}^2$ ). Если мы условимся записывать лишь слагаемые, для которых  $i < j$ , то из каждых двух совпадающих слагаемых останется лишь одно (с коэффициентом 2), и мы получим

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j r_{ij}^2 = m J_Z + m J_Z,$$

что равносильно формуле Якоби (24) (при  $n = 3$ ).

**Пример 25.** Дан четырехугольник  $ABCD$ , стороны и диагонали которого имеют длины  $a, b, c, d, e, f$ . В каждой вершине четырехугольника помещена масса 1. Вычислим момент инерции этой системы м. т. относительно середины  $Z$  отрезка  $PQ$ , соединяющего середины диагоналей.

**Решение.** Точка  $Z$  является центром масс рассматриваемой системы м. т. По формуле Якоби имеем

$$J_Z = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

Выше было рассмотрено понятие момента инерции относительно точки. При желании читатель может аналогичным образом исследовать момент инерции системы м. т. относительно оси  $l$ :

$$J_l = m_1 |S_1 A_1|^2 + m_2 |S_2 A_2|^2 + \dots + m_n |S_n A_n|^2,$$

где  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — проекции точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на ось  $l$ . Например, можно предложить читателю доказать формулы Лагранжа и Якоби для случая момента инерции относительно оси — именно эти формулы для момента инерции  $J_l$  используются в механике при изучении вращательного движения тел.

Мы же рассмотрим применения момента инерции (относительно точки) к задачам геометрии. Как мы увидим, многие

геометрические задачи получают простые и красивые решения при использовании формул Лагранжа и Якоби. Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 26.** Известны радиусы  $R, r$  описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ . Вычислим расстояние  $d$  между центрами этих окружностей.

**Решение.** Пусть  $Z$  — центр вписанной окружности,  $O$  — центр описанной окружности,  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Точка  $Z$  — центр масс трех м. т.  $aA, bB, cC$  (см. задачу 47). По формуле Лагранжа имеем

$$(a + b + c) |OZ|^2 = J_O - J_Z.$$

Далее, по определению момента инерции находим

$$J_O = a |OA|^2 + b |OB|^2 + c |OC|^2 = (a + b + c) R^2.$$

Наконец,  $J_Z$  вычислим по формуле Якоби:

$$\begin{aligned} J_Z &= \frac{1}{a + b + c} (ab |AB|^2 + bc |BC|^2 + ca |CA|^2) = \\ &= \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{a + b + c} = abc. \end{aligned}$$

Поэтому  $d^2 = |OZ|^2 = R^2 - \frac{abc}{a + b + c}.$

Этот ответ еще не окончательный, поскольку требуется выразить  $d$  только через радиусы  $R$  и  $r$  (без использования длин сторон  $a, b, c$ ). Для получения окончательного ответа вспомним формулы, выражающие площадь  $S$  треугольника  $ABC$  через длины сторон и радиусы  $R, r$ :

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \frac{1}{2} (a + b + c) r.$$

Из этих формул находим  $\frac{abc}{a + b + c} = 2Rr$ , и потому

$$d^2 = R(R - 2r).$$

Эта формула впервые была получена Эйлером. Из нее видно (поскольку  $d^2 \geq 0$ ), что в любом треугольнике диаметр вписанной окружности не превосходит радиуса описанной окружности (можно показать, что равенство имеет место лишь для равностороннего треугольника).

**Пример 27.** В плоскости даны две точки  $A$  и  $B$ ;  $\lambda \neq 1$  — заданное положительное число. Найдём множество всех точек

$M$  плоскости, для которых  $\frac{|MA|}{|MB|} = \lambda.$

Решение. Условие  $\frac{|MA|}{|MB|} = \lambda$  равносильно соотношению

$$\lambda^2 |MB|^2 - |MA|^2 = 0.$$

Левая часть этого равенства представляет собой момент инерции системы двух м. т.  $\lambda^2 B$  и  $(-1) A$  относительно точки  $M$ . Значит, нужно найти множество всех таких точек  $M$  плоскости, для которых

$$J_M = 0.$$

Обозначив через  $Z$  центр масс м. т.  $\lambda^2 B$  и  $(-1) A$ , имеем, согласно формулам Лагранжа и Якоби,

$$J_M = J_Z + (\lambda^2 - 1) |ZM|^2 = - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} |AB|^2 + (\lambda^2 - 1) |ZM|^2.$$

Поэтому условие  $J_M = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда

$$|ZM| = \frac{\lambda}{|\lambda^2 - 1|} |AB|.$$

Отсюда ясно, что искомая фигура представляет собой окружность (рис. 49) с центром  $Z$

и радиусом  $\frac{\lambda}{|\lambda^2 - 1|} |AB|$ .

Ситуация, рассмотренная в примере 27, может быть обобщена следующим образом. Обозначим через  $\sigma$  систему м. т. (21); при этом равенство нулю некоторых масс  $m_1, \dots, m_n$  не исключается. Момент инерции этой системы относительно точки  $M$  обозначим через  $J_M(\sigma)$ . Выясним вид множества  $\Phi$  всех точек  $M$  плоскости, для которых

$$J_M(\sigma) = h,$$

где  $h$  — заданная константа.

Рассмотрим различные возможные случаи. Если суммарная масса  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ , то, обозначив через  $Z$  центр масс системы  $\sigma$ , имеем, согласно формуле Лагранжа,

$$|ZM|^2 = \frac{1}{m} (h - J_Z(\sigma)).$$

Отсюда видно, что  $\Phi$  может оказаться окружностью (при  $J_Z(\sigma) < h$ ), одной точкой (при  $J_Z(\sigma) = h$ ) или пустым множеством (при  $J_Z(\sigma) > h$ ).

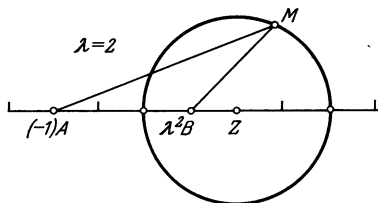


Рис. 49.

Пусть теперь  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$ , но хотя бы одна из масс  $m_1, \dots, m_n$  отлична от нуля; скажем,  $m_n \neq 0$ . Обозначив через  $C$  центр масс системы  $\sigma'$ , состоящей из м. т.  $m_1 A_1, \dots, m_{n-1} A_{n-1}$ , имеем при любом выборе точки  $M$

$$J_M(\sigma') = J_C(\sigma') + (-m_n) |MC|^2,$$

$$J_M(\sigma) = J_M(\sigma') + m_n |MA_n|^2.$$

Поэтому условие  $J_M(\sigma) = h$  приобретает вид

$$m_n |MA_n|^2 + (-m_n) |MC|^2 = h - J_C(\sigma') = \text{const.}$$

При  $C \neq A_n$  множество  $\Phi$  представляет собой (см. задачу 144) некоторую прямую, перпендикулярную прямой  $CA_n$ . Если же  $C = A_n$ , то множество точек, удовлетворяющих последнему равенству, представляет собой либо всю плоскость, либо пустое множество.

Наконец, если все массы  $m_1, \dots, m_n$  равны нулю, то искомая фигура  $\Phi$  представляет собой либо всю плоскость (при  $h = 0$ ), либо пустое множество.

Объединяя все случаи, приходим к следующему выводу:

**Теорема 9.** *Множество всех точек  $M$  плоскости, относительно которых заданная в этой плоскости система материальных точек (21) имеет заданный момент инерции  $h$ , представляет собой окружность, прямую, плоскость, точку или пустое множество.*

**Пример 28.** Каждая из трех окружностей  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  касается одной стороны треугольника  $A_1 A_2 A_3$  и продолжений двух других сторон. Пусть  $\gamma_1$  касается стороны  $A_2 A_3$  в точке  $B_1$ ;  $\gamma_2$  — стороны  $A_3 A_1$  в точке  $B_2$ , а  $\gamma_3$  — стороны  $A_1 A_2$  в точке  $B_3$ . Через точки  $B_1, B_2, B_3$  проведены прямые  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , перпендикулярные соответственно сторонам  $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ . Докажем, что эти прямые проходят через одну точку.

**Решение.** Рассмотрим три различные загрузки вершин треугольника:

$$\sigma_1: \quad 0A_1, \quad 1A_2, \quad (-1)A_3,$$

$$\sigma_2: \quad (-1)A_1, \quad 0A_2, \quad 1A_3,$$

$$\sigma_3: \quad 1A_1, \quad (-1)A_2, \quad 0A_3.$$

Прямая  $\Phi_1$  характеризуется условием (см. доказательство теоремы 9)

$$J_M(\sigma_1) = J_{B_1}(\sigma_1) = |B_1 A_2|^2 - |B_1 A_3|^2 (=h_1).$$

Чтобы вычислить  $h_1$ , обозначим через  $T_2$  и  $T_3$  точки касания окружности  $\gamma_1$  с прямыми  $A_1 A_2$  и  $A_1 A_3$  и положим:  $|A_2 A_3| = a$ ,  $|A_3 A_1| = b$ ,  $|A_1 A_2| = c$ ,  $|B_1 A_2| = x$ ,  $|B_1 A_3| = y$ ,  $|A_1 T_2| = z$

(рис. 50). Тогда

$$x + y = a, \quad z - x = c, \quad z - y = b.$$

Отсюда  $x - y = b - c$ , и потому

$$h_1 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = a(b - c).$$

Таким образом, условие  $J_M(\sigma_1) = h_1$ , характеризующее прямую  $\Phi_1$ , можно переписать в виде

$$1 \cdot |MA_2|^2 + (-1) \cdot |MA_3|^2 = a(b - c). \quad (25)$$

Аналогично, прямые  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  характеризуются условиями

$$1 \cdot |MA_3|^2 + (-1) \cdot |MA_1|^2 = b(c - a), \quad (26)$$

$$1 \cdot |MA_1|^2 + (-1) \cdot |MA_2|^2 = c(a - b). \quad (27)$$

Пусть теперь  $M$  — точка пересечения прямых  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Тогда точка  $M$  удовлетворяет соотношениям (25) и (26). Складывая эти соотношения и умножая результат на  $(-1)$ , получаем

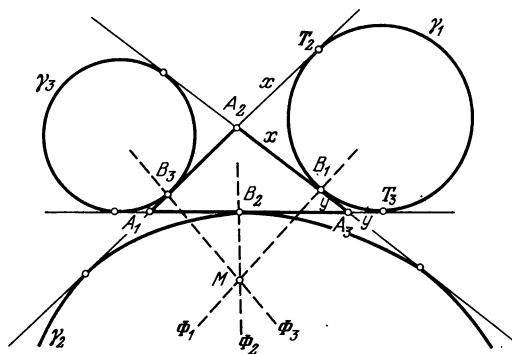


Рис. 50.

(27); это означает, что в точке  $M$  удовлетворяется и соотношение (26), т. е.  $M$  принадлежит и третьей прямой  $\Phi_3$ .

В заключение докажем следующую теорему, позволяющую в ряде случаев находить расстояние между двумя точками.

**Теорема 10.** Если при одном распределении  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  единичной массы между заданными точками  $A_1, A_2, \dots, A_n$  центром масс возникающих  $n$  м. т. служит точка  $P$ , а при другом таком распределении  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  центром масс возникающих  $n$  м. т. окажется точка  $Q$ , то

$$|PQ|^2 = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - q_i)(p_j - q_j) |A_i A_j|^2.$$



Доказательство проведем для  $n = 3$  (в общем случае рассуждения аналогичны). По условию

$$1P = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3, \quad 1Q = q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Рассмотрим три системы материальных точек

$$\sigma_1: (p_1 - q_1) A_1, \quad (p_2 - q_2) A_2, \quad (p_3 - q_3) A_3, \quad 1Q,$$

$$\sigma_2: q_1 A_1, \quad q_2 A_2, \quad q_3 A_3,$$

$$\sigma_3: p_1 A_1, \quad p_2 A_2, \quad p_3 A_3, \quad 1Q.$$

Моменты инерции этих систем относительно точки  $P$  обозначим через  $J_P^{(1)}, J_P^{(2)}, J_P^{(3)}$ , а относительно точки  $Q$  — через  $J_Q^{(1)}, J_Q^{(2)}, J_Q^{(3)}$ . Центрами масс систем  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  служат соответственно точки  $P, Q$  и середина  $Z$  отрезка  $PQ$ .

Поэтому имеем

$$J_P^{(3)} = J_Z^{(3)} + 2|PZ|^2, \quad J_Q^{(3)} = J_Z^{(3)} + 2|QZ|^2,$$

и, следовательно,

$$J_P^{(3)} = J_Q^{(3)} = p_1 |QA_1|^2 + p_2 |QA_2|^2 + p_3 |QA_3|^2.$$

Кроме того, по теореме Лагранжа

$$J_P^{(2)} = J_Q^{(2)} + 1 \cdot |PQ|^2 = \\ = q_1 |QA_1|^2 + q_2 |QA_2|^2 + q_3 |QA_3|^2 + |PQ|^2.$$

Наконец, по формуле Якоби, примененной к системе  $\sigma_1$ , имеем

$$J_P^{(1)} = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (p_i - q_i)(p_j - q_j) |A_i A_j|^2 + \sum_{i=1}^3 (p_i - q_i) |A_i Q|^2.$$

Из последних трех формул (с учетом очевидного соотношения  $J_P^{(3)} = J_P^{(1)} + J_P^{(2)}$ ) и вытекает доказываемое равенство.

### Задачи

**137.** Рассматривается система м.т. с нулевой суммарной массой. Докажите теорему Дарбу: если перенести массы некоторой группы м.т. в центр масс этой группы точек (или проделать то же самое для нескольких групп м.т.), то при этом сумма  $\sum m_j |A_i A_j|^2$  не изменится.

**138.** Пользуясь результатом задачи 137, докажите теорему Эйлера: в любом четырехугольнике сумма квадратов сторон больше суммы квадратов диагоналей на учетверенный квадрат расстояния между серединами диагоналей.

**139.** Ребро правильного тетраэдра равно  $a$ . Вычислите радиус описанного около него шара.

**140.** Зная длины  $a, b, c$  сторон треугольника  $ABC$ , вычислите длину биссектрисы  $CC_1$ .

141. Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Зная длины  $a, b, c$  сторон треугольника, вычислите сумму

$$\sigma = a|OA|^2 + b|OB|^2 + c|OC|^2.$$

142. В некотором треугольнике расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности в три раза меньше радиуса этой окружности. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

143. Найдите множество всех точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от вершин заданного в этой плоскости параллелограмма  $ABCD$  равна заданной величине  $h$ .

144. На плоскости заданы две различные точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что при  $m \neq 0$  множество всех точек  $M$  плоскости, для которых момент инерции относительно системы м. т.  $mA$  и  $(-m)B$  равен заданной константе  $h$ , представляет собой некоторую прямую, перпендикулярную прямой  $AB$ .

145. Докажите, что в пространстве множество, рассмотренное в задаче 144, представляет собой плоскость, перпендикулярную  $(AB)$ .

146. Сформулируйте и докажите пространственный аналог теоремы 9.

147. Стороны треугольника имеют длины  $a, b, c$ . Найдите расстояние между точкой пересечения медиан этого треугольника и центром вписанной в него окружности.

148. Докажите, что расстояние между центром описанной окружности треугольника и центром вневписанной окружности (касающейся одной стороны и продолжений двух других сторон) равно  $R(R + 2r')$ , где  $R$  — радиус описанной окружности, а  $r'$  — радиус рассматриваемой вневписанной окружности.

## § 10. Применение понятия момента инерции к доказательству неравенств

Отметим два простых и полезных алгебраических следствия, непосредственно вытекающих из формулы Лагранжа.

Следствие 1. Если масса каждой материальной точки системы (21) положительна, то при любом выборе точки  $S$  справедливо неравенство

$$J_S \geq m|SZ|^2,$$

где  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  — суммарная масса системы, а  $Z$  — ее центр масс. Равенство здесь имеет место в том и только в том случае, когда все точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  совпадают.

Следствие 2. Если материальные точки (21) имеют положительную суммарную массу  $m$ , то для произвольной точки  $S$  справедливо неравенство

$$J_S \geq J_Z,$$

где  $Z$  — центр масс системы. Равенство здесь имеет место в том и только в том случае, когда  $S = Z$ .

Для случая  $m < 0$  знак неравенства заменяется на противоположный.

Иначе говоря, центр масс системы м.т. (с положительной суммарной массой) есть точка, относительно которой эта система имеет наименьший момент инерции.

Проиллюстрируем возможность применения этих предложений для доказательства неравенств.

**Пример 29.** Докажем, что для любых действительных чисел  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$  справедливо соотношение

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

(оно называется *неравенством Коши — Буняковского*).

**Решение.** Пусть  $m_1, \dots, m_n$  — какие-либо положительные числа. Выберем на числовой оси точки  $A_1, \dots, A_n$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  и поместим в них массы  $m_1, \dots, m_n$ . Координата центра масс м.т.  $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$  равна  $x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$ , и, согласно следствию 1, имеем (взяв момент системы относительно нулевой точки числовой оси)

$$m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2 \geq \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $x_1 = \dots = x_n$ .

Положим теперь (считая, что все числа  $b_1, \dots, b_n$  отличны от нуля):  $m_k = b_k^2$ ,  $x_k = \frac{a_k}{b_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда из доказанного неравенства непосредственно следует неравенство Коши — Буняковского (для отличных от нуля  $b_1, \dots, b_n$ ). Легко видеть, что если некоторые из чисел  $b_1, \dots, b_n$  обращаются в нуль, это неравенство остается справедливым.

**Пример 30.** Докажем, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — произвольные положительные числа и  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , то справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

**Решение.** Выберем на числовой оси с началом  $O$  материальные точки с массами  $m_1 = \frac{a_1}{s - a_1}, \dots, m_n = \frac{a_n}{s - a_n}$  и координатами  $x_1 = s - a_1, \dots, x_n = s - a_n$ . Через  $Z$  обозначим их центр масс. Тогда  $m = \frac{a_1}{s - a_1} + \dots + \frac{a_n}{s - a_n}$ ,

$$|OZ| = \frac{a_1 + \dots + a_n}{m} = \frac{s}{m}. \text{ Далее,}$$

$$\begin{aligned} J_0 &= a_1(s - a_1) + \dots + a_n(s - a_n) = \\ &= (a_1 + \dots + a_n)s - (a_1^2 + \dots + a_n^2) = s^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Так как  $J_0 \geq m|OZ|^2$  (см. следствие 1), то

$$\begin{aligned} s^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2) &\geq m \cdot \frac{s^2}{m^2}, \quad m(s^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)) \geq s^2, \\ (m-1)s^2 &\geq m(a_1^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Но в силу неравенства между средним квадратическим и средним арифметическим (задача 149) имеем

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{s^2}{n}.$$

Поэтому  $(m-1)s^2 \geq m \cdot \frac{s^2}{n}$ , откуда и получается требуемое

$$\text{неравенство } m \geq \frac{n}{n-1}.$$

#### Задачи

**149.** Выведите из неравенства Коши — Буняковского, что для любых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  их средне-квадратическое не меньше их среднего арифметического, т. е.

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

**150.** С помощью следствия 2 докажите, что функция

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

достигает наименьшего значения в точке  $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .

**151.** Докажите, что если неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство, причем хотя бы одно из чисел  $b_1, \dots, b_n$  отлично от нуля, то существует такое  $k$ , что  $a_1 = kb_1, \dots, a_n = kb_n$ .

## БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

«То, что трем точкам плоскости возможно сопоставить такие грузы, чтобы заданная четвертая точка оказалась их центром,... привело меня к новому методу задания точек на плоскости».

А. Ф. Мёбиус.  
«Барицентрическое исчисление».

**§ 11. Барицентрические координаты на плоскости**

Согласно теореме 1 (см. § 2) для любых трех масс  $m_1, m_2, m_3$ , сопоставляемых вершинам треугольника  $A_1A_2A_3$ , однозначно определена точка  $M$ , являющаяся центром масс получающихся трех м. т.  $m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3$ . Справедливо и обратное (мы это видели при решении задачи 29): для любой внутренней точки  $M$  треугольника  $A_1A_2A_3$  можно подобрать такие массы  $m_1, m_2, m_3$ , что  $M$  будет центром масс трех м. т.  $m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3$ . По мысли немецкого математика А. Ф. Мёбиуса, это позволяет ввести новую, очень своеобразную и интересную систему координат, сопоставляющую каждой точке  $M$  соответствующие массы  $m_1, m_2, m_3$ . Правда, в обычных (прямоугольных) координатах каждая точка описывается двумя действительными числами  $x, y$ , а здесь «координат» имеется три. Однако эти координаты определены лишь с точностью до числового множителя. Это позволяет считать, что в действительности мы имеем дело только с двумя координатами (например, можно рассматривать отношения  $m_1:m_2:m_3$ ). Более детально эти координаты и рассматриваются в этом параграфе. Мы увидим, что барицентрические координаты обладают рядом интересных свойств и дают возможность решать немало геометрических задач.

Итак (см. задачу 29), если  $M$  — произвольная внутренняя точка треугольника  $A_1A_2A_3$ , то можно подобрать такие положительные числа  $m_1, m_2, m_3$ , для которых  $M$  будет центром масс получающихся м. т.  $m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3$ . Ясно, что массы  $m_1, m_2, m_3$ , обладающие этим свойством, не определены однозначно: если  $k$  — произвольное положительное число, то массы  $km_1, km_2, km_3$  обладают тем же свойством: центром

масс м. т.  $(km_1)A_1$ ,  $(km_2)A_2$ ,  $(km_3)A_3$  будет та же точка  $M$ . Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы сделать сумму масс равной единице; в самом деле, при  $k = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}$  мы получим такие массы

$$\mu_1 = km_1, \quad \mu_2 = km_2, \quad \mu_3 = km_3,$$

что их сумма равна 1 и при этом по-прежнему  $M$  будет центром масс м. т.  $\mu_1 A_1$ ,  $\mu_2 A_2$ ,  $\mu_3 A_3$ . Иначе говоря, для любой внутренней точки  $M$  треугольника  $A_1 A_2 A_3$  существуют такие положительные числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , что

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad (28)$$

и при этом  $M$  является центром масс м. т.  $\mu_1 A_1$ ,  $\mu_2 A_2$ ,  $\mu_3 A_3$ , т. е. (см. (10) или (11))

$$M = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3. \quad (29)$$

Эти числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  (удовлетворяющие условиям (28), (29)) и называются *барицентрическими координатами* (или, как мы будем говорить, *Б-координатами*) точки  $M$  относительно базисного треугольника  $A_1 A_2 A_3$ ; ниже мы увидим, что барицентрические координаты определяются точкой  $M$  однозначно.

Например, так как точка пересечения медиан  $Z$  треугольника  $A_1 A_2 A_3$  является центром масс трех м. т.  $1A_1$ ,  $1A_2$ ,  $1A_3$ , а значит, и центром масс трех м. т.  $\frac{1}{3}A_1$ ,  $\frac{1}{3}A_2$ ,  $\frac{1}{3}A_3$ , то числа  $\mu_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\mu_3 = \frac{1}{3}$  являются Б-координатами точки  $Z$ .

Оказывается, что если не ограничиваться только положительными массами  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , а допускать для них произвольные действительные значения, то можно определить барицентрические координаты не только для внутренних точек треугольника  $A_1 A_2 A_3$ , но и для любых точек в плоскости этого треугольника. Именно, справедлива следующая

**Теорема 11.** Пусть  $A_1 A_2 A_3$  — заданный треугольник и  $M$  — произвольная точка в его плоскости. Тогда существуют однозначно определенные действительные числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , удовлетворяющие условиям (28) и (29).

**Доказательство.** Равенство (29), означающее, что  $M$  — центр масс системы м. т.  $\mu_1 A_1$ ,  $\mu_2 A_2$ ,  $\mu_3 A_3$ , равносильно тому, что для произвольной точки  $O$  справедливо соотношение

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3}.$$

Как мы знаем, это равенство будет справедливо для любой точки  $O$ , если оно выполняется для какой-либо одной точки. Напишем это равенство для случая  $O = A_3$ :

$$\overrightarrow{A_3 M} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2, \quad (30)$$

где  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{A_3 A_1}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{A_3 A_2}$  (рис. 51). Равенство (29) равносильно соотношению (30). Поэтому нужно доказать, что для любой

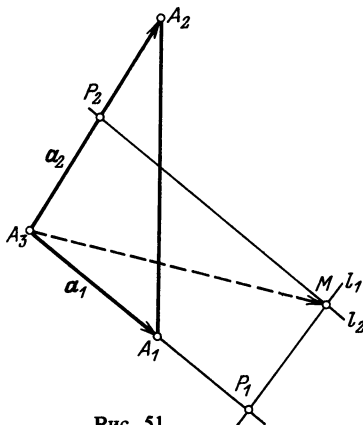


Рис. 51.

точки  $M$  существуют однозначно определенные числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , удовлетворяющие соотношениям (28), (30). Но соотношением (30) однозначно определяются числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (это соотношение означает разложение вектора  $\overrightarrow{A_3 M}$  по векторам  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ , см. рис. 51), а после этого число  $\mu_3$  однозначно определяется соотношением (28).

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $A_1 A_2 A_3$  — заданный треугольник и  $M$  — произвольная точка его плоскости. Числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , удовлетворяющие условиям (28) и (29) (их существование и однозначная определенность установлены в теореме 11), называются *барицентрическими координатами* (или *Б-координатами*) точки  $M$ .

**З а м е ч а н и е.** Равенство (30) и относящийся к нему рис. 51 дают фактически способ нахождения барицентрических координат произвольной точки  $M$ . Иначе говоря, нужно через  $M$  провести прямые  $l_1$ ,  $l_2$ , параллельные  $(A_2 A_3)$ ,  $(A_1 A_3)$ , и тогда

$$\mu_1 = \frac{\overrightarrow{A_3 P_1}}{\overrightarrow{A_3 A_1}}, \quad \mu_2 = \frac{\overrightarrow{A_3 P_2}}{\overrightarrow{A_3 A_2}}.$$

**Пример 31.** Однородная проволока изогнута в виде контура треугольника  $ABC$  с длинами сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 52). Центром

масс контура треугольника  $ABC$  называют центр масс  $Q$  этой проволоки. Определим, каковы Б-координаты точки  $Q$  относительно  $\triangle ABC$ .

**Решение.** Пусть  $\rho$  — линейная плотность проволоки (т. е. масса куска проволоки длиной 1). Положение центра масс всей проволоки не изменится, если мы сосредоточим всю массу стороны  $BC$  (т. е.  $\rho a$ ) в ее середине  $A_1$  и аналогично поступим со сторонами  $CA$  и  $AB$ . Значит,  $Q$  — центр масс трех м. т.  $(\rho a)A_1$ ,  $(\rho b)B_1$ ,  $(\rho c)C_1$ . Рассредоточим каждую из трех масс  $\rho a$ ,  $\rho b$ ,  $\rho c$  в вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника так, чтобы это не повлияло на положение центра масс  $Q$ . Мы этого достигнем, если заменим м. т.  $(\rho a)A_1$  двумя м. т.:  $\left(\frac{1}{2}\rho a\right)B$  и  $\left(\frac{1}{2}\rho a\right)C$  и аналогично поступим с материальными точками  $(\rho c)C_1$  и  $(\rho b)B_1$ . Тогда  $Q$  окажется центром масс трех м. т.

$$\frac{1}{2}\rho(b+c)A, \quad \frac{1}{2}\rho(c+a)B \text{ и } \frac{1}{2}\rho(a+b)C.$$

Так как сумма масс этих м. т. равна  $\rho(a+b+c) = 2\rho p$ , то точка  $Q$  имеет Б-координаты  $\frac{b+c}{4\rho}$ ,  $\frac{c+a}{4\rho}$ ,  $\frac{a+b}{4\rho}$ .

**Пример 32.** Вычислим Б-координаты точки  $H$  пересечения высот остроугольного треугольника  $ABC$  (рис. 53), принимая этот треугольник в качестве базисного, если величины углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равны соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

**Решение.** Подберем для вершин  $B$  и  $C$  такие массы  $m_2$  и  $m_3$ , чтобы точка  $A_1$  оказалась центром масс двух м. т.  $m_2B$  и  $m_3C$ . По правилу рычага имеем  $m_2 |BA_1| = m_3 |A_1C|$ ,

$$\text{т. е. } m_2 c \cos \beta = m_3 b \cos \gamma.$$

Аналогично, чтобы точка  $B_1$  оказалась центром масс м. т.  $m_3C$  и  $m_1A$ , должно выполняться равенство

$$m_3 a \cos \gamma = m_1 c \cos \alpha.$$

Из полученных равенств следует (если учесть теорему синусов),

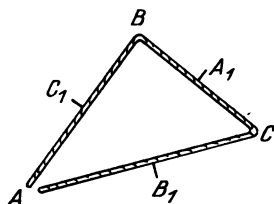


Рис. 52.

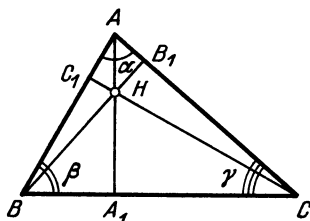


Рис. 53.



что

$$\frac{m_1}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{m_2}{\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma} = \frac{m_3}{\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma},$$

т. е.

$$\frac{m_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{m_2}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{m_3}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Отсюда вытекает, что точка  $H$  имеет Б-координаты  $k \operatorname{tg} \alpha$ ,  $k \operatorname{tg} \beta$ ,  $k \operatorname{tg} \gamma$ , где  $k = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$ .

**Пример 33.** Точки  $P$  и  $Q$  имеют соответственно Б-координаты  $(p_1, p_2, p_3)$  и  $(q_1, q_2, q_3)$ . Вычислим Б-координаты середины  $M$  отрезка  $PQ$ .

**Решение.** Точка  $M$  — центр масс двух м. т.  $1 \cdot P$  и  $1 \cdot Q$ . Рассредоточим их массы по вершинам базисного треугольника, т. е. заменим м. т.  $1 \cdot P$  и  $1 \cdot Q$  соответственно на м. т.  $p_1 A_1$ ,  $p_2 A_2$ ,  $p_3 A_3$  и  $q_1 A_1$ ,  $q_2 A_2$ ,  $q_3 A_3$ ; ясно, что при этом положение центра масс системы не изменится (т. е. эти шесть м. т. также имеют своим центром масс точку  $M$ ). Но точка  $M$  — центр масс трех м. т.  $(p_1 + q_1) A_1$ ,  $(p_2 + q_2) A_2$ ,  $(p_3 + q_3) A_3$ . Так как сумма масс этих м. т. равна 2, то Б-координаты точки  $M$  равны

$$\frac{1}{2}(p_1 + q_1), \quad \frac{1}{2}(p_2 + q_2), \quad \frac{1}{2}(p_3 + q_3).$$

**Пример 34.** На сторонах треугольника  $A_1 A_2 A_3$  взяты такие точки  $M$ ,  $N$ , что  $\vec{A_2 M} = k \vec{A_2 A_3}$ ,  $\vec{A_1 N} = l \vec{A_1 A_3}$ . Вычислим Б-координаты точки  $Z$  пересечения прямых  $A_1 M$  и  $A_2 N$  (рис. 54).

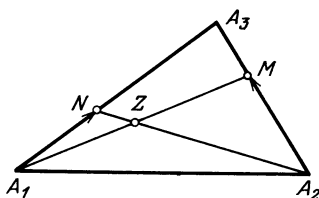


Рис. 54.

**Решение.** Пусть  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — барицентрические координаты точки  $Z$ , т. е.  $Z$  — центр масс м. т.  $\mu_1 A_1$ ,  $\mu_2 A_2$ ,  $\mu_3 A_3$ . Прямая  $A_1 Z$  пересекает сторону  $A_2 A_3$  в точке, являющейся центром масс м. т.  $\mu_2 A_2$  и  $\mu_3 A_3$ . Иначе говоря,  $\mu_2 \vec{M A_2} + \mu_3 \vec{M A_3} = \vec{0}$ , т. е.

$-\mu_2 \vec{A_2 M} + \mu_3 (\vec{A_2 A_3} - \vec{A_2 M}) = \vec{0}$ . Перепишем это равенство в виде  $\vec{A_2 M} = \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \vec{A_2 A_3}$ , мы найдем, что  $\frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} = k$ . Ана-

логично,  $\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} = l$ . Находя из этих соотношений  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и подставляя эти значения в соотношение  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ,

получаем

$$\frac{1-l}{l}\mu_3 + \frac{1-k}{k}\mu_3 + \mu_3 = 1,$$

откуда находим  $\mu_3$ , а затем  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$\mu_3 = \frac{kl}{k+l-kl}, \quad \mu_1 = \frac{k(1-l)}{k+l-kl}, \quad \mu_2 = \frac{l(1-k)}{k+l-kl}.$$

Заметим в заключение, что полученная ранее с помощью теоремы Лагранжа формула для нахождения расстояния между двумя точками (см. теорему 10) как раз приспособлена для случая, когда точки заданы своими Б-координатами. Из этой теоремы следует, что если две точки  $P$  и  $Q$  имеют относительно  $\triangle A_1A_2A_3$  барицентрические координаты  $(p_1; p_2; p_3)$  и  $(q_1; q_2; q_3)$ , то расстояние между ними можно вычислить по формуле

$$|PQ|^2 = - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (p_i - q_i)(p_j - q_j) |A_iA_j|^2. \quad (31)$$

**Пример 35.** Известны длины сторон треугольника. Вычислим расстояние между точкой  $M$  пересечения его медиан и центром  $O$  вписанной окружности.

**Решение.** Точки  $M$  и  $O$  имеют такие Б-координаты:

$$M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ и } O\left(\frac{a}{2p}; \frac{b}{2p}; \frac{c}{2p}\right). \text{ Поэтому}$$

$$\begin{aligned} -|MO|^2 = & \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{c}{2p}\right)a^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{c}{2p}\right)b^2 + \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{2p}\right)c^2. \end{aligned}$$

**Пример 36.** Вычислим (зная длины сторон) расстояние между вершиной  $A$  треугольника  $ABC$  и центром внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ .

**Решение.** Примем  $\triangle ABC$  в качестве базисного. Пусть  $P$  — центр внеписанной окружности; Б-координаты точки  $P$  равны  $\left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)}\right)$ , где  $2p = a + b + c$ . Так как Б-координаты точки  $A$  равны  $(1; 0; 0)$ , то по формуле (31) находим после несложных вычислений

$$|PA|^2 = \frac{bcp}{p-a}.$$

**Пример 37.** Известны радиус  $R$  окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , радиус  $r$  вписанной окружности и радиус  $r_a$  внепи-

санной окружности, касающейся стороны  $BC$  и продолжений двух других сторон. Вычислим расстояние между центрами  $O$  и  $O_a$  последних двух окружностей.

**Решение.** Пусть  $a, b, c$  — длины сторон  $\triangle ABC$ ,  $p$  — его полупериметр,  $s$  — площадь. Точки  $O$  и  $O_a$  имеют Б-координаты относительно  $\triangle ABC$

$$\left(\frac{a}{2p}; \frac{b}{2p}; \frac{c}{2p}\right) \text{ и } \left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)}\right).$$

Применяя формулу (31) и производя упрощения, имеем

$$|OO_a|^2 = \frac{a^2 bc}{p(p-a)} = \frac{4Rsa}{p(p-a)} = 4Rs \left( \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} \right) = 4R(r_a - r).$$

### Задачи

**152.** Точка  $M$  имеет относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Докажите следующие утверждения:

а) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит прямой  $A_1A_2$ , если  $\mu_3 = 0$ ;

б) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит отрезку  $[A_1A_2]$ , если  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 = 0$ ;

в) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит контуру  $\triangle A_1A_2A_3$ , если  $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0, \mu_1\mu_2\mu_3 = 0$ ;

г) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит лучу, который противоположен лучу  $A_1A_2$ , если  $\mu_2 < 0, \mu_3 = 0$ ;

д) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит открытой полуплоскости, которая ограничена прямой  $A_1A_2$  и не содержит  $\triangle A_1A_2A_3$ , если  $\mu_3 < 0$ ;

е) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит углу  $A_1A_2A_3$ , если  $\mu_1 \geq 0, \mu_3 \geq 0$ ;

ж) точка  $M$  в том и только в том случае лежит внутри треугольника  $A_1A_2A_3$ , если  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$ ;

з) точка  $M$  в том и только в том случае принадлежит углу, который симметричен углу  $A_1A_2A_3$  относительно точки  $A_2$ , если  $\mu_1 \leq 0, \mu_3 \leq 0$ .

**153.** Изобразите на рисунке точки, имеющие следующие Б-координаты:  $C(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ .

**154.** Какие Б-координаты имеют следующие точки: вершина  $A_3$  базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ ; середина  $A'_3$  его стороны  $A_1A_2$ ?

**155.** На сторонах базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  выбраны точки:  $A'_1$  на стороне  $A_2A_3$ , причем  $|A_2A'_1| = \frac{1}{3}|A_2A_3|$ , и  $A'_3$  на стороне  $A_1A_2$ , причем  $|A_1A'_3| = \frac{1}{3}|A_1A_3|$ . Найдите Б-координаты точки пересечения отрезков  $A_1A'_1$  и  $A_3A'_3$ .

156. Точка  $P$  расположена на стороне  $A_1A_2$  базисного треугольника, а точка  $Q$  — на продолжении этой стороны, причем  $\frac{|A_1P|}{|PA_2|} = 2$ ,  $\frac{|A_1Q|}{|QA_2|} = 2$ . Найдите Б-координаты точек  $P$  и  $Q$ .

157. В базисном треугольнике  $A_1A_2A_3$  проведены медианы  $A_1A'_1$  и  $A_2A'_2$ . На стороне  $A_1A_2$  выбрана такая точка  $P$ , что  $\frac{|A_1P|}{|PA_2|} = \lambda$ , и через точку  $P$  проведены прямые, параллельные медианам  $A_1A'_1$  и  $A_2A'_2$  и встречающие стороны треугольника соответственно в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Каковы Б-координаты этих точек?

158. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана такая точка  $M$ , что  $|AM| = \frac{1}{3}|AC|$ , а на продолжении стороны  $BC$  — такая точка  $N$ , что  $|BN| = |CB|$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $MN$  и  $AB$ . Какие Б-координаты имеет точка  $P$  относительно  $\triangle ABC$  и относительно  $\triangle ANC$ ?

159. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ) биссектриса  $AE$  пересекает высоту  $BD$  в точке  $F$ , причем  $\frac{|FB|}{|FD|} = 3$ . Какие барицентрические координаты относительно  $\triangle ABC$  имеет точка  $H$  пересечения высот  $\triangle ABC$ ?

160. Какие барицентрические координаты относительно  $\triangle ABC$  имеет вершина  $D$  параллелограмма  $ABCD$ ?

161. На сторонах  $AB$  и  $AC$  базисного  $\triangle ABC$  выбраны точки  $C_1$  и  $B_1$ . Зная Б-координаты  $(p; 1-p; 0)$  и  $(q; 0; 1-q)$  этих точек, найдите Б-координаты точки  $M$  пересечения прямых  $BB_1$  и  $CC_1$ .

162. В трапеции  $ABCD$  длины оснований  $AB$  и  $CD$  равны соответственно  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Пусть  $M$  и  $N$  — середины оснований  $AB$  и  $CD$ ,  $P$  — точка пересечения продолжений боковых сторон,  $Q$  — точка пересечения диагоналей.

а) Каковы Б-координаты точек  $C, D, M, N, Q$  относительно  $\triangle ABP$ ?

б) Докажите с помощью барицентрических координат, что четыре точки  $M, N, P, Q$  лежат на одной прямой.

163. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  известны длины  $a, b$  катетов. Вычислите Б-координаты (относительно  $\triangle ABC$ ) основания высоты, опущенной из вершины прямого угла  $C$  на гипотенузу  $AB$ .

164. Точки  $P, Q, R$  имеют Б-координаты  $(p_1; p_2; p_3), (q_1; q_2; q_3), (r_1; r_2; r_3)$ . Докажите, что Б-координаты центроида (точки пересечения медиан) треугольника  $PQR$  равны

$$\frac{1}{3}(p_1 + q_1 + r_1), \quad \frac{1}{3}(p_2 + q_2 + r_2), \quad \frac{1}{3}(p_3 + q_3 + r_3).$$

165. Материальные точки  $\alpha P$  и  $\beta Q$  имеют своим центром масс точку  $M$ . Точки  $P$  и  $Q$  имеют Б-координаты  $(p_1; p_2; p_3)$  и  $(q_1; q_2; q_3)$ . Докажите, что точка  $M$  имеет Б-координаты

$$\frac{\alpha p_1 + \beta q_1}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\alpha p_2 + \beta q_2}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\alpha p_3 + \beta q_3}{\alpha + \beta}.$$

166. Материальные точки  $\alpha P$ ,  $\beta Q$ ,  $\gamma R$  ( $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ ) имеют точку  $M$  своим центром масс. Относительно  $\triangle A_1 A_2 A_3$  точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  имеют Б-координаты  $(p_1; p_2; p_3)$ ,  $(q_1; q_2; q_3)$  и  $(r_1; r_2; r_3)$ . Докажите, что Б-координаты точки  $M$  равны

$$\frac{\alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\alpha p_2 + \beta q_2 + \gamma r_2}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\alpha p_3 + \beta q_3 + \gamma r_3}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

167. Точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , лежащие на одной прямой, имеют Б-координаты  $(p_1; p_2; p_3)$ ,  $(q_1; q_2; q_3)$ ,  $(r_1; r_2; r_3)$ . Какие массы следует поместить в точках  $P$  и  $Q$ , чтобы их центром масс оказалась точка  $R$ ?

168. Точка  $P$  относительно  $\triangle A_1 A_2 A_3$  имеет Б-координаты  $(m_1; m_2; m_3)$ , причем  $m_1 \neq 1$ ; прямая  $A_1 P$  встречает прямую  $A_2 A_3$  в точке  $A'_1$ . Докажите, что: а) точка  $A'_1$  имеет Б-координаты  $\left(0; \frac{m_2}{m_2 + m_3}; \frac{m_3}{m_2 + m_3}\right)$ ; б) каждая точка  $Q$  прямой  $A_1 A'_1$  имеет Б-координаты  $(1 - k(m_2 + m_3); km_2; km_3)$ , где  $k$  — некоторое число, зависящее от выбора точки  $Q$ .

169. В плоскости треугольника  $A_1 A_2 A_3$  взята такая точка  $M$ , что  $\overrightarrow{A_3 M} = x \overrightarrow{A_3 A_1} + y \overrightarrow{A_3 A_2}$ . Докажите, что барицентрические координаты точки  $M$  равны  $x; y; 1 - x - y$ .

170. Пусть точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  имеют относительно базисного треугольника  $A_1 A_2 A_3$  барицентрические координаты  $(p_1; p_2; p_3)$ ,  $(q_1; q_2; q_3)$ ,  $(r_1; r_2; r_3)$ . Докажите, что если  $p_3 = q_3 = r_3$ , то точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  лежат на одной прямой, параллельной  $(A_1 A_2)$ .

171. Точки  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$  выбраны на сторонах  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_1$ ,  $A_1 A_2$  треугольника  $A_1 A_2 A_3$  так, что  $|A_2 A'_3| = \frac{1}{4} |A_2 A_3|$ ,  $|A_3 A'_2| = \frac{1}{4} |A_3 A_1|$ ,  $|A_1 A'_3| = \frac{1}{4} |A_1 A_2|$ . Три прямые  $A_1 A'_1$ ,  $A_2 A'_2$ ,  $A_3 A'_3$  ограничивают

некоторый треугольник  $PQR$ . Докажите, что точка пересечения медиан  $\triangle PQR$  совпадает с точкой пересечения медиан  $\triangle A_1 A_2 A_3$ .

172. На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что точка пересечения медиан  $\triangle A_1 B_1 C_1$  совпадает с точкой пересечения медиан  $\triangle ABC$  в том и только в том случае, если существует такое  $k$ , что  $\overrightarrow{AB_1} = k \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{CA_1} = k \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BC_1} = k \overrightarrow{BA}$ .

173. В правильном треугольнике  $ABC$  со стороной  $a$  проведены прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ , причем  $\overrightarrow{CA_1} = 2 \overrightarrow{A_1 B}$ ,  $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{B_1 B_2} = \overrightarrow{B_2 A}$ ,  $\overrightarrow{AC_2} = 3 \overrightarrow{C_2 B}$ . Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $P$ , а  $BB_2$  и  $CC_2$  — в точке  $Q$ . Вычислите расстояние  $|PQ|$ .

## § 12. Барицентрические координаты как площади

В § 11 барицентрические координаты были введены, исходя из соображений, связанных с центрами масс. Замечательно, что имеется и другой, чисто геометрический под-

ход к барицентрическим координатам, позволяющий выразить эти координаты через площади некоторых треугольников. Это, во-первых, дает интересную геометрическую интерпретацию самого понятия центра масс (для случая трех м. т. на плоскости) и, во-вторых, открывает новые возможности применения барицентрических координат к решению геометрических задач.

Сначала рассмотрим случай, когда  $M$  лежит внутри базисного треугольника.

**Теорема 12.** Пусть точка  $P$  (рис. 55) лежит внутри базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  и пусть  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  — площади треугольников  $A_1A_2A_3$ ,  $PA_2A_3$ ,  $A_1PA_3$ ,  $A_1A_2P$ . Тогда Б-координаты точки  $P$  равны

$$\mu_1 = \frac{S_1}{S}, \quad \mu_2 = \frac{S_2}{S}, \quad \mu_3 = \frac{S_3}{S}. \quad (32)$$

Иными словами, если поместить в вершинах  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  базисного треугольника массы, численно равные (или пропорциональные) площадям  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , то их центром масс окажется точка  $P$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $P$  имеет Б-координаты  $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ . Обозначим через  $B_1$  центр масс двух м. т.  $\mu_2A_2$  и  $\mu_3A_3$ . Тогда точки  $B_1$ ,  $P$ ,  $A_1$  лежат на одной прямой. По правилу рычага имеем

$$\frac{|A_3B_1|}{|B_1A_2|} = \frac{\mu_2}{\mu_3},$$

и потому

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_3} &= \frac{|A_1P|h_3}{|A_1P|h_2} = \frac{h_3}{h_2} = \frac{|B_1P|h_3}{|B_1P|h_2} = \\ &= \frac{S_{PB_1A_3}}{S_{PB_1A_2}} = \frac{|A_3B_1|h_1}{|A_2B_1|h_1} = \frac{|A_3B_1|}{|A_2B_1|} = \frac{\mu_2}{\mu_3}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\mu_2}{S_2} = \frac{\mu_3}{S_3}$ . Аналогично,  $\frac{\mu_1}{S_1} = \frac{\mu_2}{S_2}$ , и потому

$$\frac{\mu_1}{S_1} = \frac{\mu_2}{S_2} = \frac{\mu_3}{S_3} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{1}{S},$$

откуда

$$\mu_1 = \frac{S_1}{S}, \quad \mu_2 = \frac{S_2}{S}, \quad \mu_3 = \frac{S_3}{S}.$$

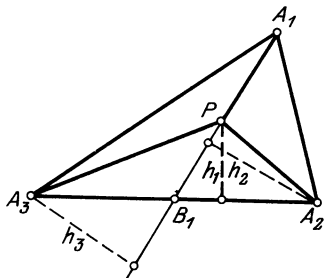


Рис. 55.

**Пример 38.** Найдем Б-координаты центра  $O$  окружности, вписанной в базисный треугольник  $ABC$  со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Решение.** Обозначим через  $r$  радиус вписанной окружности. Тогда  $S_1 = \frac{1}{2}ar$ ,  $S_2 = \frac{1}{2}br$ ,  $S_3 = \frac{1}{2}cr$ ,  $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ . Поэтому центр  $O$  имеет Б-координаты

$$\frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b+c}.$$

**Пример 39.** На сторонах треугольника  $A_1A_2A_3$  выбраны такие точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , что  $|A_2B_1| = \frac{1}{4}|A_2A_3|$ ,  $|A_3B_2| = \frac{1}{4}|A_3A_1|$ ,  $|A_1B_3| = \frac{1}{4}|A_1A_2|$  (рис. 56). Зная площадь  $S$  треугольника  $A_1A_2A_3$ , вычислим площадь  $\sigma$  треугольника  $PQR$ , ограниченного прямыми  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ .

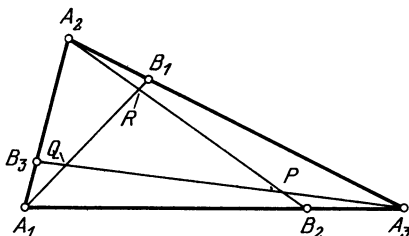


Рис. 56.

**Решение.**  $S_{PQR} = S_{A_1A_2A_3} - S_{A_1RA_2} - S_{A_2PA_3} - S_{A_3QA_1}$ . Точка  $R$  имеет (см. пример 34) Б-координаты  $\left(\frac{1}{13}; \frac{9}{13}; \frac{3}{13}\right)$ . Поэтому

(по теореме 12)  $\frac{S_{A_1A_2R}}{S} = \frac{3}{13}$ . Аналогично,  $\frac{S_{PA_2A_3}}{S} = \frac{3}{13}$ ,  $\frac{S_{A_1QA_3}}{S} = \frac{3}{13}$ . Следовательно,  $\sigma = S - 3 \cdot \frac{3}{13}S = \frac{4}{13}S$ .

Вычисление барицентрических координат точки можно свести к вычислению площадей некоторых треугольников и в том случае, когда точка лежит вне базисного треугольника или на его границе.

Предварительно заметим, что, расположив в определенном порядке вершины какого-либо треугольника  $PQR$ , мы тем самым задаем направление обхода на его контуре: от  $P$  к  $Q$ , от  $Q$  к  $R$ , от  $R$  к  $P$  (рис. 57). Это направление обхода

может осуществляться либо «против часовой стрелки», либо «по часовой стрелке». В первом случае (рис. 57) будем считать, что треугольник *ориентирован положительно*, а во втором случае (рис. 58) — *отрицательно*.

«Ориентированной площадью» треугольника с заданным на его контуре направлением обхода условимся называть: а) площадь  $S$  этого треугольника, если он ориентирован положительно, б)  $-S$ , если треугольник ориентирован отрицательно.

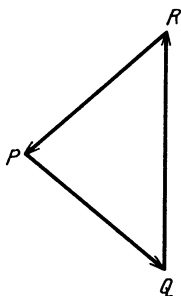


Рис. 57.

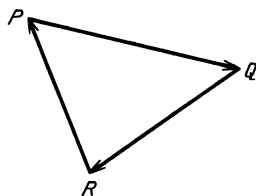


Рис. 58.

Если точки  $P, Q, R$  расположены на одной прямой, условимся считать ориентированную площадь «треугольника»  $PQR$  равной нулю.

Например, на рис. 59 ориентированные площади треугольников  $A_1A_2A_3$  и  $A_1A_2P$  положительны, ориентированная площадь треугольника  $PA_2A_3$  отрицательна, а ориентированная площадь треугольника  $A_1PA_3$  равна нулю.

Будем считать, что базисный треугольник  $A_1A_2A_3$  ориентирован положительно, т. е. обход  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_1$  осуществляется против движения часовой стрелки. Пусть  $P$  — произвольная точка плоскости. Соединив ее с точками  $A_1, A_2, A_3$ , получим три треугольника:  $PA_2A_3$ ,  $A_1PA_3$ ,  $A_1A_2P$ .

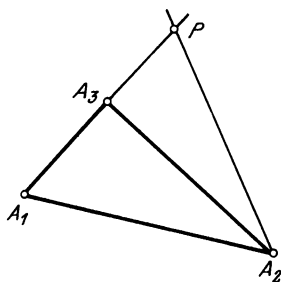


Рис. 59.

Заметим, что порядок вершин в обозначении каждого из этих треугольников выбран так, чтобы общая сторона этого треугольника и базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  была в обоих треугольниках ориентирована одинаково. Например, при обходе  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_1$  треугольника  $A_1A_2A_3$  и при обходе  $P \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow P$  треугольника  $PA_2A_3$  их общая сторона  $A_2A_3$  проходит одинаково (от  $A_2$  к  $A_3$ ).



Оказывается, что при любом выборе точки  $P$  на плоскости утверждение теоремы 12 остается справедливым, если только под  $S_1, S_2, S_3, S$  понимать площади ориентированных треугольников  $PA_2A_3, A_1PA_3, A_1A_2P, A_1A_2A_3$ .

Доказательство теоремы 12 в общем случае можно провести так же, как это было сделано выше для случая, когда точка  $P$  расположена внутри базисного треугольника. Для этого следует заметить, что три прямые, на которых расположены стороны треугольника, разбивают плоскость на семь областей (одной из которых является сам базисный треугольник). Точка  $P$  может быть расположена либо внутри любой из этих областей, либо на одной из трех прямых, на которых расположены стороны треугольника. Иначе говоря, представляются несколько различных возможных случаев расположения точки  $P$ . В каждом случае нужно подтвердить справедливость формулы (32). И хотя это каждый раз делается при помощи рассуждения, аналогичного тому, которое было проведено в случае, когда точка  $P$  лежит внутри базисного треугольника, тем не менее наличие ряда отдельных случаев делает доказательство скучным и утомительным.

Вместо этого мы дадим другое доказательство, основой которого служит понятие *определителя* второго порядка. Ценность этого доказательства состоит в том, что одним рассуждением охватываются все возможные случаи. Понятие определителя важно и само по себе — оно применяется при решении систем линейных уравнений и в ряде других вопросов. Рассмотрим основные свойства определителей второго порядка.

Пусть  $\mathbf{a}(x_1; y_1)$  и  $\mathbf{b}(x_2; y_2)$  — два вектора, заданные своими координатами в прямоугольной системе координат. Число  $x_1y_2 - x_2y_1$  называется *внешним* (или *косым*) *произведением* векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначается через  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ . Чтобы легче было запомнить, как получается разность  $x_1y_2 - x_2y_1$ , рассмотрим таблицу (*матрицу*), составленную из координат векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}; \quad (33)$$

здесь координаты вектора  $\mathbf{a}$  расположены в *первом столбце* этой матрицы, а координаты вектора  $\mathbf{b}$  — во *втором столбце*. Следующая запись показывает, как образуется разность  $x_1y_2 - x_2y_1$ :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1,$$

т. е. произведение чисел, стоящих на *главной диагонали* матрицы (идущей из верхнего левого угла в нижний правый), берется с плюсом, а произведение чисел, стоящих на *второй диагонали* — с минусом. Для удобства число  $x_1y_2 - x_2y_1$  обозначают также через

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad (34)$$

и называют *определителем* (или *детерминантом*) матрицы (33). Таким образом,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Дадим теперь геометрическую интерпретацию определителя (или внешнего произведения векторов).

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , и обозначим через  $S$  *ориентированную площадь* этого параллелограмма, т. е. площадь его, взятую со знаком плюс, если поворот вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  (на угол, не превосходящий по величине  $180^\circ$ ) осуществляется в *положительном* направлении, т. е. против часовой стрелки (рис. 60), и площадь,

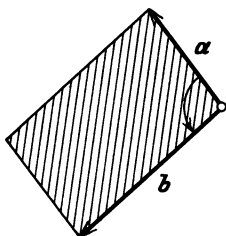


Рис. 60.

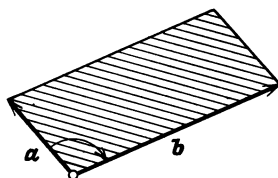


Рис. 61.

взятую со знаком минус, если этот поворот осуществляется в *отрицательном* направлении, т. е. по часовой стрелке (рис. 61). Оказывается, что справедливо равенство

$$S = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (35)$$

т. е. внешнее произведение  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  (или, что то же самое, определитель (34)) равно ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Это и есть нужная нам геометрическая интерпретация внешнего произведения векторов (или определителя).

В самом деле, пусть направление вектора  $\mathbf{a}$  получается из единичного вектора  $\mathbf{e}_1$ , задающего направление оси абсцисс,

поворотом на угол  $\alpha$ , а направление вектора  $\mathbf{b}$  получается из  $\mathbf{e}_1$  поворотом на угол  $\beta$  (рис. 62). Тогда

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \alpha; |\mathbf{a}| \sin \alpha), \text{ т. е. } x_1 = |\mathbf{a}| \cos \alpha, y_1 = |\mathbf{a}| \sin \alpha;$$

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \cos \beta; |\mathbf{b}| \sin \beta), \text{ т. е. } x_2 = |\mathbf{b}| \cos \beta, y_2 = |\mathbf{b}| \sin \beta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \sin \beta - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \beta \sin \alpha = \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

и потому  $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |S|$ ; при этом ясно, что если  $0 < \beta - \alpha < \pi$ , т. е. поворот от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  (на угол, меньший  $\pi$ ) осуществляется в положительном направлении, то оба числа  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  и  $S$  положительны, а если этот поворот осуществляется в отрицательном направлении, т. е.  $-\pi < \beta - \alpha < 0$ , то оба числа  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  и  $S$  отрицательны. Этим и завершается доказательство формулы (35).

Наконец, при доказательстве теоремы 12 мы воспользуемся тем, что внешнее произведение обладает следующими свойствами:

- 1)  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ;
- 2)  $(k\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ ;
- 3)  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$ ;

4)  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 1$ , где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — единичные векторы, имеющие направление осей абсцисс и ординат.

Доказательство этих формул несложно. Например, для доказательства третьей из них обозначим через  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  и  $(x_3; y_3)$  координаты векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ y_1 & y_2 + y_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3); \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_1 y_3 - x_3 y_1), \end{aligned}$$

откуда и вытекает справедливость свойства 3).

**Пример 40.** Докажем, что для любого вектора  $\mathbf{a}$  справедливо соотношение  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ .

**Решение.** Пусть  $(x; y)$  — координаты вектора  $\mathbf{a}$ . Тогда

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} = xy - xy = 0.$$

Можно предложить и другое доказательство, основанное на свойстве 1) («антикоммутативности») внешнего произведения:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a})$ , и потому  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ .

**Пример 41.** Вычислим ориентированную площадь треугольника  $ABC$  с вершинами  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ .

**Решение.** Ориентированная площадь треугольника  $ABC$  вдвое меньше ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  (рис. 63). Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 12. Пусть  $A_1A_2A_3$  — базисный треугольник и  $P$  — произвольная точка в плоскости этого треугольника.

Обозначим векторы  $\overrightarrow{PA_1}$ ,  $\overrightarrow{PA_2}$ ,

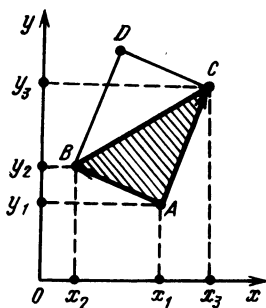


Рис. 63.

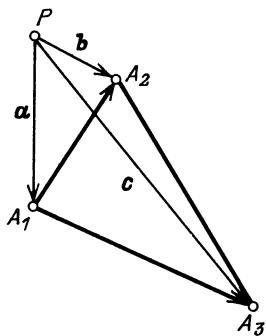


Рис. 64.

$\overrightarrow{PA_3}$  через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  (рис. 64). Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_{PA_2A_3} + S_{PA_1A_3} + S_{PA_1A_2} &= S_{PA_2A_3} + S_{PA_3A_1} + S_{PA_1A_2} = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = S_{A_1A_2A_3}, \end{aligned}$$

чем установлена справедливость формулы

$$S_1 + S_2 + S_3 = S. \quad (36)$$

Далее, так как  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — три вектора, лежащие в одной плоскости, то какой-либо из них выражается через два других. Пусть, например,  $\mathbf{a} = k\mathbf{b} + l\mathbf{c}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} = \\ & = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})(k\mathbf{b} + l\mathbf{c}) + (\mathbf{c} \wedge (k\mathbf{b} + l\mathbf{c}))\mathbf{b} + ((k\mathbf{b} + l\mathbf{c}) \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} = \\ & = k(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{b} + l(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{c} + k(\mathbf{c} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b} + l(\mathbf{c} \wedge \mathbf{c})\mathbf{b} + k(\mathbf{b} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} + \\ & + l(\mathbf{c} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} = k(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{b} + l(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{c} - k(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{0} - \\ & - l(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Доказанное соотношение

$$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

можно (умножив его на  $1/2$ ) переписать в виде

$$S_{PA_2A_3}\mathbf{a} + S_{PA_3A_1}\mathbf{b} + S_{PA_1A_2}\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

откуда

$$\frac{S_{PA_2A_3}}{S_{A_1A_2A_3}}\mathbf{a} + \frac{S_{PA_3A_1}}{S_{A_1A_2A_3}}\mathbf{b} + \frac{S_{PA_1A_2}}{S_{A_1A_2A_3}}\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Иначе говоря, числа (32) удовлетворяют соотношению

$$\mu_1\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b} + \mu_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

и, кроме того (в силу (36)), соотношению

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Но это и означает, что числа (32) являются барицентрическими координатами точки  $P$ , чем и завершается доказательство теоремы 12.

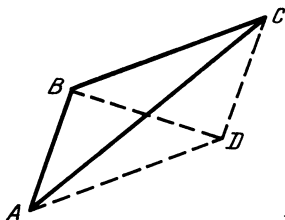


Рис. 65.

**Пример 42.** Дан параллелограмм  $ABCD$ ; треугольник  $ABC$  принят в качестве базисного. Определим, какие Б-координаты имеет вершина  $D$ .

**Решение.** Обозначим через  $S$  площадь базисного треугольника  $ABC$  (рис. 65), а через  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  — площади (ориентированные) треугольников  $DBC$ ,  $ADC$ ,  $ABD$ . Все эти треугольники имеют численно равные площади, т. е.  $|S| = |S_A| = |S_B| = |S_C|$ . При этом треугольники  $DBC$  и  $ABD$  ориентированы так же, как и базисный треугольник  $ABC$ , а треугольник  $ADC$  ориентирован противоположно, т. е.  $S_A =$

$= S_C = S, S_B = -S$ . Следовательно, барицентрические координаты точки  $D$  равны

$$\mu_A = \frac{S_A}{S} = 1, \quad \mu_B = \frac{S_B}{S} = -1, \quad \mu_C = \frac{S_C}{S} = 1.$$

Иначе говоря,  $D$  есть центр масс м. т.  $1A, (-1)B, 1C$ ; эти результаты мы уже имели в примере 11.

**Пример 43.** На сторонах треугольника  $ABC$ , как на основаниях, построены правильные треугольники  $ABC', BSA', CAB'$ , не имеющие с треугольником  $ABC$  общих внутренних точек. Докажем, что прямые  $AA', BB', CC'$  имеют общую точку.

**Решение.** Пусть  $A_1$  — точка пересечения прямых  $AA'$  и  $BC$  (рис. 66) и аналогичный смысл имеют обозначения  $B_1$

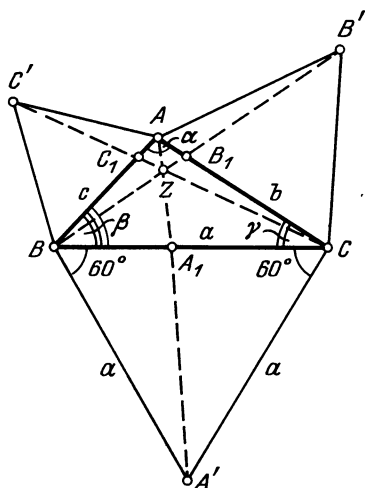


Рис. 66.

и  $C_1$ . Мы найдем Б-координаты точек  $A', B', C'$  (относительно базисного треугольника  $ABC$ ), а затем Б-координаты точек  $A_1, B_1, C_1$ ; если теперь удастся загрузить вершины треугольника такими массами, чтобы центрами масс этих трех м. т., взятых попарно, были точки  $A_1, B_1, C_1$ , то это будет означать, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  (т. е. прямые  $AA', BB', CC'$ ) имеют общую точку. Для реализации этого плана обозначим через  $a, b, c$  длины сторон треугольника, а через  $\alpha, \beta, \gamma$  — его углы. Тогда Б-координатами точки  $A'$  служат числа  $S_A/S, S_B/S, S_C/S$ , где  $S_A, S_B, S_C, S$  — ориентированные площади треугольников  $A'BC, AA'C, ABA', ABC$ . Иначе

говоря, эти Б-координаты равны

$$-\frac{a^2\sqrt{3}}{4S}, \quad \frac{1}{2S}ab\sin(\gamma + 60^\circ), \quad \frac{1}{2S}ac\sin(\beta + 60^\circ).$$

Следовательно (см. замечание 1, рис. 6), точка  $A_1$  является центром масс м. т.

$$\frac{1}{2S}ab\sin(\gamma + 60^\circ)B, \quad \frac{1}{2S}ac\sin(\beta + 60^\circ)C.$$

Разделив массы этих м. т. на одно и то же число  $\frac{a}{2S}\sin(\beta + 60^\circ)\sin(\gamma + 60^\circ)$ , мы найдем, что точка  $A_1$  является центром масс двух м. т.

$$\frac{b}{\sin(\beta + 60^\circ)}B \text{ и } \frac{c}{\sin(\gamma + 60^\circ)}C.$$

Аналогично,  $C_1$  является центром масс первых двух из м. т.

$$\frac{a}{\sin(\alpha + 60^\circ)}A, \quad \frac{b}{\sin(\beta + 60^\circ)}B, \quad \frac{c}{\sin(\gamma + 60^\circ)}C,$$

а  $B_1$  является центром масс первой и третьей из них. Отсюда следует, что центр масс  $Z$  всех этих трех м. т. принадлежит каждой из прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ .

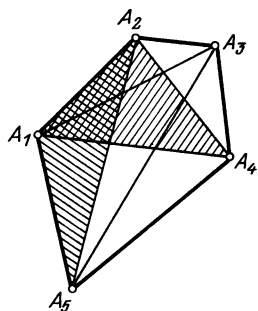


Рис. 67.

**Пример 44.** Дан плоский пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  (рис. 67) и известны ориентированные площади  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  треугольников

$$A_5A_1A_2, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \\ A_3A_4A_5, A_4A_5A_1.$$

Вычислим площадь  $x$  всего пятиугольника.

**Решение.** Примем  $\triangle A_1A_2A_4$  за базисный, и пусть точка  $A_3$  имеет относительно него Б-координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_4$ :

$$A_3 = \mu_1A_1 + \mu_2A_2 + \mu_4A_4.$$

Аналогично, приняв  $\triangle A_1A_2A_5$  за базисный, имеем

$$A_3 = v_1A_1 + v_2A_2 + v_5A_5.$$

Вычитая, получаем (после деления на  $\mu_4$ ).

$$A_4 = \frac{v_1 - \mu_1}{\mu_4}A_1 + \frac{v_2 - \mu_2}{\mu_4}A_2 + \frac{v_5}{\mu_4}A_5,$$

откуда видно, что коэффициенты в этом соотношении являются Б-координатами точки  $A_4$  относительно  $\triangle A_1 A_2 A_5$ . В силу определения Б-координат с помощью площадей, находим из этих соотношений

$$\mu_2 = \frac{S_{A_1 A_3 A_4}}{S_{A_1 A_2 A_4}}, \quad \nu_2 = \frac{S_{A_1 A_3 A_5}}{S_{A_1 A_2 A_5}}, \quad \mu_4 = \frac{S_{A_1 A_2 A_3}}{S_{A_1 A_2 A_4}}, \quad \frac{\nu_2 - \mu_2}{\mu_4} = \frac{S_{A_1 A_4 A_5}}{S_{A_1 A_2 A_5}},$$

и потому

$$\frac{S_{A_1 A_3 A_5}}{S_{A_1 A_2 A_5}} - \frac{S_{A_1 A_3 A_4}}{S_{A_1 A_2 A_4}} = \frac{S_{A_1 A_4 A_5}}{S_{A_1 A_2 A_5}} \cdot \frac{S_{A_1 A_2 A_3}}{S_{A_1 A_2 A_4}}.$$

Учитывая, что

$$S_{A_1 A_3 A_5} = x - a_2 - a_4, \quad S_{A_1 A_2 A_5} = a_1, \quad S_{A_1 A_3 A_4} = x - a_2 - a_5,$$

$$S_{A_1 A_2 A_4} = x - a_3 - a_5, \quad S_{A_1 A_4 A_5} = a_5, \quad S_{A_1 A_2 A_3} = a_2,$$

(рис. 67), получаем отсюда уравнение

$$\frac{x - a_2 - a_4}{a_1} - \frac{x - a_2 - a_5}{x - a_3 - a_5} = \frac{a_5}{a_1} \cdot \frac{a_2}{x - a_3 - a_5},$$

из которого и можно найти искомую площадь  $x$ .

Заметим, что рассуждение пригодно и в случае, когда многоугольник  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  невыпуклый (и даже если его контур имеет самопересечение), но при этом необходимо учитывать знаки площадей треугольников (в зависимости от их ориентации).

**Пример 45.** Через точку  $M$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , и через вершины треугольника проведены прямые, пересекающие противоположные стороны в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Пусть площади треугольников, отсекаемых прямыми  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$  от треугольника  $ABC$ , равны соответственно  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Докажем теорему Мёбиуса: площадь  $x$  треугольника  $A'B'C'$  удовлетворяет кубическому уравнению

$$x^3 + (p + q + r)x^2 - 4pqr = 0.$$

**Решение.** Пусть  $(p_1; p_2; p_3)$  — барицентрические координаты точки  $M$ ;  $S_1, S_2, S_3, S$  — площади треугольников  $MBC, AMC, ABM, ABC$ ;  $S'_1, S'_2, S'_3$  — площади треугольников  $MB'C', A'MC', A'B'M$  (рис. 68). Тогда

$$x = S'_1 + S'_2 + S'_3; \quad \frac{S'_1}{S_1} = \frac{|MB'| \cdot |MC'|}{|MB| \cdot |MC|} = \frac{p_2}{p_1 + p_3} \cdot \frac{p_3}{p_1 + p_2};$$

$$S'_1 = \frac{S'_1}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S} \cdot S = \frac{p_1 p_2 p_3}{(p_1 + p_2)(p_1 + p_3)} S.$$



Записав аналогичные формулы для  $S'_2$  и  $S'_3$ , получим затем из соотношения  $x = S'_1 + S'_2 + S'_3$

$$x = \frac{2p_1 p_2 p_3}{(p_1 + p_2)(p_2 + p_3)(p_3 + p_1)} S. \quad (37)$$

С другой стороны,

$$p = \frac{p}{S} \cdot S = \frac{|AC'| \cdot |AB'|}{|AB| \cdot |AC|} \cdot S, \text{ откуда } p = \frac{p_2}{p_1 + p_3} \cdot \frac{p_3}{p_1 + p_2} \cdot S.$$

Записав аналогичные выражения для  $q$  и  $r$ , получаем в силу (37)

$$pqr = \frac{1}{4} x^2 S, \quad S = p + q + r + x.$$

Из этих двух соотношений и следует, что  $x$  удовлетворяет указанному кубическому уравнению.

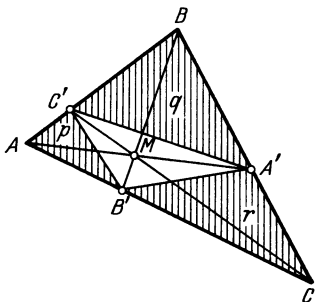


Рис. 68.

**Теорема 13.** Пусть точки  $P, Q, R$  имеют относительно базисного треугольника  $A_1 A_2 A_3$  барицентрические координаты  $(p_1; p_2; p_3), (q_1; q_2; q_3), (r_1; r_2; r_3)$ . Тогда для ориентированных площадей справедлива формула

$$S_{PQR} = ((p_1 q_2 - p_2 q_1) r_3 + (q_1 r_2 - q_2 r_1) p_3 + (r_1 p_2 - r_2 p_1) q_3) S_{A_1 A_2 A_3}. \quad (38)$$

**Доказательство.** Имеем (для любой точки  $O$ )

$$\overrightarrow{OP} = p_1 \overrightarrow{OA_1} + p_2 \overrightarrow{OA_2} + p_3 \overrightarrow{OA_3}, \quad \overrightarrow{OQ} = q_1 \overrightarrow{OA_1} + q_2 \overrightarrow{OA_2} + q_3 \overrightarrow{OA_3},$$

откуда

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1) \overrightarrow{OA_1} + (q_2 - p_2) \overrightarrow{OA_2} + (q_3 - p_3) \overrightarrow{OA_3}.$$

Полагая здесь  $O = A_3$ , находим

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1) \overrightarrow{A_3 A_1} + (q_2 - p_2) \overrightarrow{A_3 A_2}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{PR} = (r_1 - p_1) \overrightarrow{A_3 A_1} + (r_2 - p_2) \overrightarrow{A_3 A_2}.$$

Поэтому для ориентированной площади треугольника  $PQR$  получаем (учитывая соотношение  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ )

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} (q_1 - p_1)(r_2 - p_2) \overrightarrow{A_3 A_1} \wedge \overrightarrow{A_3 A_2} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (q_2 - p_2)(r_1 - p_1) \overrightarrow{A_3 A_2} \wedge \overrightarrow{A_3 A_1}. \end{aligned}$$

Так как  $S_{A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_3 A_1} \wedge \overrightarrow{A_3 A_2} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{A_3 A_2} \wedge \overrightarrow{A_3 A_1}$ , то отсюда находим

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= ((q_1 - p_1)(r_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(r_1 - p_1)) S_{A_1 A_2 A_3} = \\ &= ((p_1 q_2 - p_2 q_1) + (q_1 r_2 - q_2 r_1) + (r_1 p_2 - r_2 p_1)) S_{A_1 A_2 A_3}. \end{aligned}$$

Наконец, умножив первое слагаемое в скобках на число  $r_1 + r_2 + r_3$  (равное единице), второе на  $p_1 + p_2 + p_3$ , а третье на  $q_1 + q_2 + q_3$ , получим окончательную формулу (38).

Доказанной теореме можно придать и другую форму. Множитель в правой части равенства (38) называется *определителем* (или *детерминантом*), составленным из элементов матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix},$$

и обозначается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = (p_1 q_2 - p_2 q_1) r_3 + (q_1 r_2 - q_2 r_1) p_3 + (r_1 p_2 - r_2 p_1) q_3. \quad (39)$$

Таким образом, теорема принимает следующую форму:

**Теорема 13'.** Пусть точки  $P, Q, R$  имеют относительно базисного треугольника  $A_1 A_2 A_3$  барицентрические координаты  $(p_1; p_2; p_3), (q_1; q_2; q_3), (r_1; r_2; r_3)$ . Тогда

$$S_{PQR} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} S_{A_1 A_2 A_3}.$$

### Задачи

**174.** Трисектрисой угла  $A$  треугольника  $ABC$  называется луч, исходящий из вершины треугольника и отсекающий от этого угла одну треть его. Пусть  $P$  — точка пересечения тех двух трисектрис углов  $B$  и  $C$ , которые прилегают к стороне  $BC$ . Зная углы  $3\alpha$ ,  $3\beta$ ,  $3\gamma$  треугольника  $ABC$ , вычислите Б-координаты точки  $P$ .

**175.** Углы базисного треугольника  $ABC$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Найдите Б-координаты относительно  $\triangle ABC$  центра  $O$  описанной около него окружности.

**176.** На сторонах треугольника  $A_1A_2A_3$  выбраны такие точки  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$ , что

$$|A_2A'_1| = \frac{1}{2}|A_2A_3|, \quad |A_3A'_2| = \frac{1}{3}|A_3A_1|, \quad |A_1A'_3| = \frac{1}{4}|A_1A_2|.$$

Прямые  $A_1A'_1$ ,  $A_2A'_2$ ,  $A_3A'_3$  ограничивают некоторый треугольник  $PQR$ . Какую часть площади всего треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $PQR$ ?

**177.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$ , как на основаниях, построены подобные равнобедренные треугольники  $BA'S$ ,  $CB'A$ ,  $AC'B$ , не имеющие с  $\triangle ABC$  общих внутренних точек. Имеют ли три прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  общую точку?

**178.** В плоскости треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ . Прямые  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  встречают противоположные стороны треугольника (или их продолжения) в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Известны ориентированные площади:  $S_{DBC} = a$ ,  $S_{ADC} = b$ ,  $S_{ABD} = c$ . Докажите, что ориентированные площади треугольников  $B'C'D$ ,  $A'B'C'$ ,  $C'B'A$  равны соответственно

$$\frac{abc}{(b+a)(c+a)}, \quad \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \quad \frac{bc(a+b+c)}{(c+a)(a'+b)}.$$

**179.** В плоскости четырехугольника  $BCDE$  взята точка  $A$ . Докажите, что ориентированные площади треугольников удовлетворяют соотношению

$$S_{ABE} \cdot S_{ACD} + S_{ACE} \cdot S_{ADB} + S_{ADE} \cdot S_{ABC} = 0.$$

**180.** Пусть  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — два ненулевых вектора в плоскости, которые не параллельны между собой. Докажите, что любой третий вектор  $\mathbf{c}$  в этой плоскости может быть выражен через  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b},$$

причем коэффициенты  $x$ ,  $y$  имеют следующие значения:

$$x = \frac{\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}, \quad y = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}.$$

**181.** Докажите, что решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (40)$$

равносильно нахождению чисел  $x, y$ , удовлетворяющих равенству

$$xa + yb = c,$$

где  $a, b, c$  — векторы, имеющие координаты  $(a_1; a_2), (b_1; b_2), (c_1; c_2)$ .

**182.** Докажите (используя результаты двух предыдущих задач), что если ввести обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

то при  $\Delta \neq 0$  система (40) имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

**183.** Докажите, что если  $a, b, c$  — длины сторон базисного треугольника  $ABC$ , а  $O$  и  $R$  — центр и радиус его описанной окружности, то Б-координаты точки  $O$  имеют значения

$$\mu_1 = ka\sqrt{4R^2 - a^2}, \quad \mu_2 = kb\sqrt{4R^2 - b^2}, \quad \mu_3 = kc\sqrt{4R^2 - c^2}$$

(где число  $k$  подобрано так, что  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ). Используя формулы  $4RS = abc$ ,  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ , где  $p$  — полупериметр, выведите отсюда, что

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}, \\ \mu_2 &= \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}, \\ \mu_3 &= \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}. \end{aligned}$$

**184.** Вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  и точка  $P$ , лежащая в его плоскости, имеют декартовы координаты  $(a; a'), (b; b'), (c; c'), (x; y)$ . Докажите, что барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  точки  $P$  относительно базисного треугольника  $ABC$  удовлетворяют соотношениям

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \begin{vmatrix} x-b & y-b' \\ x-c & y-c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x-c & y-c' \\ x-a & y-a' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x-a & y-a' \\ x-b & y-b' \end{vmatrix}.$$

**185.** Докажите, что при условиях теоремы 13 площадь треугольника  $PQR$  можно также вычислить по формуле

$$S_{PQR} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} S_{A_1A_2A_3}.$$

### § 13. Уравнения линий в барицентрических координатах

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о задании прямых и окружностей в виде уравнений в барицентрических координатах. Однако прежде обсудим возможность замены базисного треугольника.

Пусть известны Б-координаты  $(x; y; z)$  некоторой точки  $M$  (рис. 69) относительно данного базисного треугольника  $PQR$ , который назовем «старым». Пусть, далее,  $ABC$  — другой, «новый» базисный треугольник, и нам известны Б-координаты

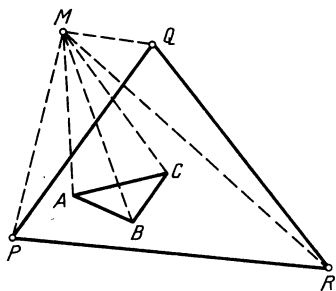


Рис. 69.

«старых» вершин  $P, Q, R$  относительно нового базисного треугольника  $(p_1; p_2; p_3), (q_1; q_2; q_3), (r_1; r_2; r_3)$ . Как найти Б-координаты  $(x'; y'; z')$  точки  $M$  относительно нового базисного треугольника?

Решение этой задачи легко записать в сокращенных обозначениях:

$$\begin{aligned} M = xP + yQ + zR &= x(p_1A + p_2B + p_3C) + y(q_1A + q_2B + \\ &+ q_3C) + z(r_1A + r_2B + r_3C) = (p_1x + q_1y + r_1z)A + \\ &+ (p_2x + q_2y + r_2z)B + (p_3x + q_3y + r_3z)C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x' &= p_1x + q_1y + r_1z, & y' &= p_2x + q_2y + r_2z, \\ & & z' &= p_3x + q_3y + r_3z. \end{aligned} \quad (41)$$

Обратим внимание на общий вид этих формул: «новые» барицентрические координаты  $(x'; y'; z')$  точки  $M$  выражаются через ее «старые» координаты посредством *линейных однородных многочленов* (т. е. многочленов первой степени без свободных членов).

**Пример 46.** В треугольнике  $ABC$  отмечены середины сторон  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Относительно треугольника  $PQR$  точка  $M$  имеет Б-координаты  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ . Определим, какие Б-координаты имеет точка  $M$  относительно  $\triangle ABC$ .

**Решение.** «Новые» Б-координаты (т. е. координаты относительно  $\triangle ABC$ ) вершин  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , очевидно, таковы:  $P\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $Q\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ ,  $R\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ . «Старые» Б-координаты

точки  $M$  известны:  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ . По формулам (41) получим:

$$x' = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}; \quad y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}; \quad z' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

Итак, «новые» Б-координаты точки  $M$  таковы:  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{5}{12}\right)$ .

**Пример 47.** Докажем, что если к окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , проведена касательная, пересекающая стороны  $CA$  и  $CB$  треугольника в точках  $A_1$  и  $B_1$ , то длины  $v$  и  $u$  отрезков  $CA_1$  и  $CB_1$  связаны с длинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  сторон треугольника зависимостью

$$(a + b + c)uv - 2ab(u + v) + ab(a + b - c) = 0.$$

**Решение.** Пусть  $P$  и  $Q$  — точки касания сторон  $CA$  и  $CB$  с вписанной окружностью;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  — длины отрезков касательных, проведенных к окружности из точек  $A$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $A_1$  (рис. 70).

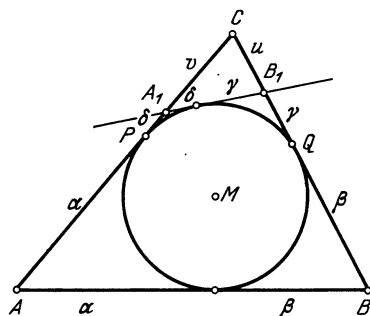


Рис. 70.

Примем  $\triangle A_1B_1C$  за базисный. Тогда (см. пример 35) центр  $M$  окружности имеет Б-координаты  $(ku; kv; -k(\gamma + \delta))$ , где  $k =$

$= \frac{1}{u + v - \gamma - \delta}$ . Легко указать Б-координаты точек  $A_1, B_1, C$  относительно  $\triangle ABC$ :

$$A_1 \left( \frac{v}{b}; 0; \frac{\alpha + \delta}{b} \right), \quad B_1 \left( 0; \frac{u}{a}; \frac{\beta + \gamma}{a} \right), \quad C(0; 0; 1).$$

Поэтому (см. формулы (41)) точка  $M$  имеет относительно  $\triangle ABC$  такие Б-координаты:

$$x = \frac{kuv}{b}, \quad y = \frac{kuv}{a}, \quad z = 1 - x - y.$$

С другой стороны, точка  $M$  — центр круга, вписанного в  $\triangle ABC$ , — имеет относительно  $\triangle ABC$  такие Б-координаты:

$M(la; lb; lc)$ , где  $l = \frac{1}{a + b + c}$ . Сравнивая первые Б-координаты,

получаем  $\frac{kuv}{b} = la$ , т. е.

$$(a + b + c)uv = (u + v - \gamma - \delta)ab.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= (b - v - \alpha) + (a - u - \beta) = a + b - (u + v) - c = \\ &= (a + b - c) - (u + v), \end{aligned}$$

приходим к требуемому равенству.

**Теорема 14.** Пусть задан базисный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Любая прямая, лежащая в плоскости этого треугольника, задается в барицентрических координатах однородным уравнением первой степени

$$a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0, \quad (42)$$

в котором не все коэффициенты  $a, b, c$  равны между собой. Обратно, любое уравнение (42), в котором не все коэффициенты равны между собой, определяет некоторую прямую.

Прежде чем доказывать эту теорему, поясним, почему все коэффициенты  $a, b, c$  не могут быть равны между собой. В самом деле, допустим, что  $a = b = c$ , т. е. мы имеем уравнение

$$a\mu_1 + a\mu_2 + a\mu_3 = 0. \quad (43)$$

При  $a \neq 0$  это означает, что  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ , и ни одна точка этому уравнению не удовлетворяет (так как должно быть  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ). Если же  $a = 0$ , то любая точка плоскости удовлетворяет уравнению (43). Таким образом, уравнение (43) (т. е. уравнение (42) при  $a = b = c$ ) определяет либо пустое множество, либо всю плоскость.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть  $l$  — некоторая прямая в плоскости треугольника  $A_1A_2A_3$ . Возьмем две точки  $A, B$ , лежащие на этой прямой, и точку  $C$ , не лежащую на ней. Относительно базисного треугольника  $ABC$  можно рассмотреть «новые» барицентрические координаты  $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3$ , и в этих координатах прямая  $l$  (содержащая сторону  $AB$  «нового» базисного треугольника  $ABC$ ) описывается уравнением  $\mu'_3 = 0$  (см. задачу 152, а). Но в силу формул (41) уравнение  $\mu'_3 = 0$  записывается в «старых» барицентрических координатах в виде

$$p_3\mu_1 + q_3\mu_2 + r_3\mu_3 = 0,$$

т. е. уравнением вида (42). При этом коэффициенты  $p_3, q_3, r_3$  не все равны между собой (см. задачу 170).

Обратно, пусть задано уравнение (42), в котором не все коэффициенты  $a, b, c$  равны между собой; пусть, скажем,  $a \neq b$ . Нам нужно найти множество всех точек, барицентрические координаты которых удовлетворяют уравнению (42). Как мы знаем, барицентрические координаты любой точки удовлетворяют соотношению

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1. \quad (44)$$

Вычитая из этого соотношения, умноженного на  $a$ , равенство (42), получаем

$$(a - b)\mu_2 + (a - c)\mu_3 = a.$$

Теперь нетрудно отыскать точки, барицентрические координаты которых удовлетворяют обоим соотношениям (42), (44).

Например, при  $\mu_3 = 0$  получаем  $\mu_2 = \frac{a}{a - b}$  и находим точку

$A\left(\frac{-b}{a - b}; \frac{a}{a - b}; 0\right)$ , а при  $\mu_3 = 1$  получаем  $\mu_2 = \frac{c}{a - b}$  и нахо-

дим точку  $B\left(\frac{-c}{a - b}; \frac{c}{a - b}; 1\right)$ . В силу ранее доказанного существуют такие числа  $a', b', c'$ , не все равные между собой, что прямая  $AB$  описывается уравнением

$$a'\mu_1 + b'\mu_2 + c'\mu_3 = 0. \quad (45)$$

В частности, этому уравнению удовлетворяют точки  $A$  и  $B$ , откуда получаем

$$-a'b + b'a = 0, \quad -a'c + b'c + c'(a - b) = 0. \quad (46)$$

Так как  $a \neq b$ , то хотя бы одно из чисел  $a, b$  отлично от нуля; пусть, скажем,  $a \neq 0$ . Тогда существует такое число  $k$ , что  $a' = ka$ , и из первого уравнения (46) получаем  $-kab + b'a = 0$ , откуда



(учитывая, что  $a \neq 0$ )  $b' = kb$ . Наконец, подставив эти значения  $a'$  и  $b'$  во второе уравнение (46), получаем  $-kac + kbc + c'(a - b) = 0$ , откуда (учитывая, что  $a - b \neq 0$ )  $c' = kc$ . Итак,  $a' = ka$ ,  $b' = kb$ ,  $c' = kc$ ; при этом  $k \neq 0$  (иначе числа  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  были бы равны между собой). Но тогда ясно, что уравнение (45) (т. е. уравнение прямой  $AB$ ) получается из (42) домножением на отличный от нуля множитель, и потому (42) также является уравнением прямой  $AB$ .

**З а м е ч а н и е.** Коэффициентам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в уравнении прямой (42) можно придать наглядный геометрический смысл. Опустим из вершин координатного треугольника  $A_1A_2A_3$  (рис. 71) перпендикуляры на прямую  $l$ , заданную уравнением (42), и пусть

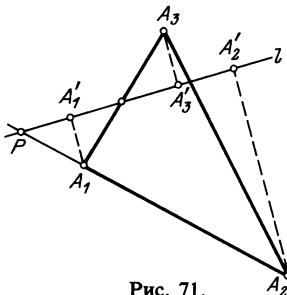


Рис. 71.

$A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$  — основания этих перпендикуляров. Допустим, что прямая  $l$  не проходит через вершины треугольника  $A_1A_2A_3$  и не параллельна  $A_1A_2$ , т. е. пересекает прямую  $A_1A_2$  в некоторой точке  $P$ , пусть  $(x_0; y_0; 0)$  — ее Б-координаты. Тогда  $P$  — центр масс м. т.  $x_0A_1$  и  $y_0A_2$ , и поэтому

$$x_0 \overrightarrow{PA_1} + y_0 \overrightarrow{PA_2} = \vec{0}, \text{ т. е. } -\frac{y_0}{x_0} = \frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PA_2}}.$$

Далее, в силу гомотетичности треугольников  $PA_1A'_1$  и  $PA_2A'_2$  имеем

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PA_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}.$$

Наконец, так как точка  $P(x_0; y_0; 0)$  лежит на прямой  $l$ , то

$$ax_0 + by_0 = 0, \text{ т. е. } \frac{a}{b} = -\frac{y_0}{x_0}.$$

Из написанных соотношений следует

$$\frac{a}{b} = \frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}.$$

Легко проверить, что это соотношение верно и тогда, когда прямая  $l$  параллельна  $(A_1A_2)$  или проходит через какую-либо вершину  $\triangle A_1A_2A_3$ . Аналогичным рассуждением убедимся, что

$$\frac{b}{c} = \frac{\overrightarrow{A_2A'_2}}{\overrightarrow{A_3A'_3}},$$

и, следовательно,

$$a:b:c = \overrightarrow{A_1A'_1} : \overrightarrow{A_2A'_2} : \overrightarrow{A_3A'_3}.$$

Мы пришли к этому соотношению в предположении, что прямые  $A_1A'_1$ ,  $A_2A'_2$ ,  $A_3A'_3$  перпендикулярны прямой  $l$ , но легко убедиться, что оно верно и тогда, когда параллельные прямые  $A_1A'_1$ ,  $A_2A'_2$ ,  $A_3A'_3$  пересекают прямую  $l$  под произвольным углом  $\varphi$ .

**Пример 48.** Докажем теорему Гаусса: если противоположные стороны четырехугольника при продолжении попарно пересекаются, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолженных противоположных сторон, лежит на одной прямой с серединами диагоналей четырехугольника.

**Решение.** Пусть  $S$  и  $T$  — середины диагоналей  $PQ$  и  $CM$  четырехугольника  $CPMQ$  и  $F$  — середина отрезка  $AB$  (см. обозначения на рис. 72). Обозначим через  $(m_1; m_2; m_3)$  барицентри-

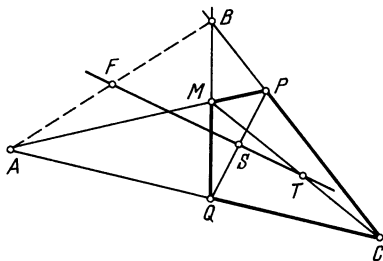


Рис. 72.

ческие координаты точки  $M$  относительно базисного треугольника  $ABC$ . Тогда (используя результат примера 33) имеем следующие Б-координаты точек:

$$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right),$$

$$M(m_1; m_2; m_3), T\left(\frac{m_1}{2}; \frac{m_2}{2}; \frac{m_3 + 1}{2}\right),$$

$$P\left(0; \frac{m_2}{m_2 + m_3}; \frac{m_3}{m_2 + m_3}\right), Q\left(\frac{m_1}{m_1 + m_3}; 0; \frac{m_3}{m_1 + m_3}\right),$$

$$S\left(\frac{m_1}{2(m_1+m_3)}; \frac{m_2}{2(m_2+m_3)}; \frac{m_3(1+m_3)}{2(m_1+m_3)(m_2+m_3)}\right).$$

Пусть уравнение прямой  $FT$  имеет вид  $a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0$ . Так как точки  $F$  и  $T$  лежат на этой прямой, то имеем

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0, \quad \frac{m_1}{2}a + \frac{m_2}{2}b + \frac{m_3+1}{2}c = 0,$$

откуда  $b = -a$ ,  $(m_3+1)c = (m_2-m_1)a$ . Мы можем считать, что  $a = m_3+1$ ,  $b = -(m_3+1)$ ,  $c = m_2-m_1$  (так как коэффициенты уравнения прямой определены лишь с точностью до общего множителя), т. е. уравнение прямой  $FT$  имеет вид

$$(m_3+1)(\mu_1-\mu_2) + (m_2-m_1)\mu_3 = 0.$$

Непосредственно проверяется, что при подстановке вместо  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  координат точки  $S$  это соотношение выполняется, т. е.  $S \in (FT)$ .

**Пример 49.** Дадим новое доказательство *теоремы Менелая* (см. § 8), использующее барицентрические координаты.

**Решение.** Введем обозначения (см. рис. 26)  $\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = \alpha$ ,  $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \beta$ ,  $\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = \gamma$ ; легко видеть, что каждое из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  отлично от  $-1$  и точки  $A_1, B_1, C_1$  имеют Б-координаты  $\left(0; \frac{1}{\beta+1}; \frac{\beta}{\beta+1}\right)$ ,  $\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}; 0; \frac{1}{\gamma+1}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha}{\alpha+1}; 0\right)$ . Выясним, существует ли уравнение  $a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0$ , которому удовлетворяют указанные три тройки чисел. Иначе говоря, будем искать числа  $a, b, c$ , из условий

$$a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{\beta+1} + c \cdot \frac{\beta}{\beta+1} = 0,$$

$$a \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} + b \cdot 0 + c \cdot \frac{1}{\gamma+1} = 0,$$

$$a \cdot \frac{1}{\alpha+1} + b \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} + c \cdot 0 = 0.$$

Полагая  $c = 1$ , находим из первого уравнения  $b = -\beta$ , а из третьего  $a = \alpha\beta$ . Второе уравнение также выполняется в силу условия Менелая:  $\alpha\beta\gamma = -1$ . Итак, все три точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на одной прямой, имеющей уравнение  $\alpha\beta\mu_1 - \beta\mu_2 + \mu_3 = 0$  (здесь не все коэффициенты равны между собой, так как  $\beta \neq -1$ ).

С помощью барицентрических координат можно записывать уравнение не только прямых, но и других линий. Следующая теорема описывает уравнение окружности.

**Теорема 15.** Пусть  $a_1, a_2, a_3$  — длины сторон базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ , и пусть  $Q$  — точка с барицентрическими координатами  $(q_1; q_2; q_3)$ , а  $r$  — положительное число. Окружность  $\Gamma$ , имеющая центр  $Q$  и радиус  $r$ , описывается в барицентрических координатах уравнением

$$a_1^2(\mu_2 - q_2)(\mu_3 - q_3) + a_2^2(\mu_1 - q_1)(\mu_3 - q_3) + a_3^2(\mu_1 - q_1)(\mu_2 - q_2) + r^2 = 0, \quad (47)$$

т. е. точка с барицентрическими координатами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  в том и только в том случае принадлежит окружности  $\Gamma$ , если справедливо равенство (47).

**Доказательство.** Точка  $P(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$  в том и только в том случае принадлежит окружности  $\Gamma$ , если справедливо равенство  $|PQ| = r$ , т. е.  $-|PQ|^2 + r^2 = 0$ . Учитывая соотношение (31), мы и получаем написанное выше уравнение окружности.

**Пример 50.** Напишем барицентрическое уравнение окружности, описанной около базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ .

**Решение.** Мы должны коэффициенты  $q_1, q_2, q_3, r$  в уравнении (47) подобрать таким образом, чтобы окружность проходила через вершины треугольника, т. е. точки  $A_1(1; 0; 0)$ ,  $A_2(0; 1; 0)$ ,  $A_3(0; 0; 1)$ . Подставив вместо  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  координаты точек  $A_1, A_2, A_3$ , получаем

$$a_2^2q_3 + a_3^2q_2 = D, \quad a_1^2q_3 + a_3^2q_1 = D, \quad a_1^2q_2 + a_2^2q_1 = D,$$

где  $D = a_1^2q_2q_3 + a_2^2q_1q_3 + a_3^2q_1q_2 + r^2$ .

Уравнение (47) после раскрытия скобок переписывается в виде

$$a_1^2\mu_2\mu_3 + a_2^2\mu_1\mu_3 + a_3^2\mu_1\mu_2 + D - \mu_1(a_2^2q_3 + a_3^2q_2) - \mu_2(a_1^2q_3 + a_3^2q_1) - \mu_3(a_1^2q_2 + a_2^2q_1) = 0,$$

т. е. в виде

$$a_1^2\mu_2\mu_3 + a_2^2\mu_1\mu_3 + a_3^2\mu_1\mu_2 + D - \mu_1D - \mu_2D - \mu_3D = 0.$$

Учитывая, что  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ , получаем уравнение описанной окружности в окончательном виде:

$$a_1^2\mu_2\mu_3 + a_2^2\mu_1\mu_3 + a_3^2\mu_1\mu_2 = 0. \quad (48)$$

Можно предложить и другое решение этого примера, использующее понятие момента инерции. Пусть взята точка  $P(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ . По формуле Лагранжа имеем (поскольку  $P$  — центр масс м. т.  $\mu_1A_1, \mu_2A_2, \mu_3A_3$ )

$$J_Q = J_P + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)|PQ|^2 = J_P + |PQ|^2.$$

Так как, по определению,

$$J_Q = \mu_1 |QA_1|^2 + \mu_2 |QA_2|^2 + \mu_3 |QA_3|^2 = \\ = \mu_1 R^2 + \mu_2 R^2 + \mu_3 R^2 = R^2,$$

то  $J_P = J_Q - |PQ|^2 = R^2 - |PQ|^2$ . Ясно, что точка  $P$  в том и только в том случае принадлежит окружности  $\Gamma$ , если  $|PQ| = R$ , т. е.  $J_P = 0$ . По формуле Якоби имеем

$$J_P = \frac{\mu_2 \mu_3 a_1^2 + \mu_1 \mu_3 a_2^2 + \mu_1 \mu_2 a_3^2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} = \mu_2 \mu_3 a_1^2 + \mu_1 \mu_3 a_2^2 + \mu_1 \mu_2 a_3^2.$$

Поэтому соотношение  $J_P = 0$  принимает вид (48).

### Задачи

**186.** Точки  $X_0, Y_0, Z_0$  имеют относительно координатного треугольника  $PQR$  такие Б-координаты:

$$(1,3; -0,4; 0,1), (-1,7; 2,8; -0,1), (-0,7; 0,1; 1,6).$$

Вычислите Б-координаты центроида треугольника  $PQR$  относительно  $\triangle X_0 Y_0 Z_0$ .

**187.** Точка  $M$  имеет относительно  $\triangle ABC$  барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Каковы ее Б-координаты относительно треугольника, вершинами которого служат середины сторон треугольника  $ABC$ ?

**188.** Точка  $Q$  имеет относительно  $\triangle ABC$  барицентрические координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Прямые  $AQ, BQ, CQ$  встречаются противоположные стороны (или их продолжения) в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Зная Б-координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  точки  $M$  относительно  $\triangle ABC$ , найдите ее Б-координаты относительно  $\triangle A_1 B_1 C_1$ .

**189.** Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $P$  и  $Q$ , имеющие Б-координаты  $(x_1; y_1; z_1)$  и  $(x_2; y_2; z_2)$ .

**190.** При каком условии три точки с Б-координатами  $(x_1; y_1; z_1), (x_2; y_2; z_2), (x_3; y_3; z_3)$  лежат на одной прямой?

**191.** Имеется уравнение прямой  $ax + by + cz = 0$  в Б-координатах относительно  $\triangle ABC$ . Каково будет уравнение той же прямой в системе координат с осями  $CA$  и  $CB$  (если за единицы длины по этим осям принимаются отрезки  $CA$  и  $CB$ )?

**192.** При каком условии две прямые, заданные в барицентрических координатах уравнениями  $ax + by + cz = 0$  и  $a'x + b'y + c'z = 0$ , параллельны?

**193.** Прямая  $l$  проходит через точки с Б-координатами  $(x_1; y_1; z_1)$  и  $(x_2; y_2; z_2)$ , а прямая  $l'$  — через точки  $(x'_1; y'_1; z'_1)$  и  $(x'_2; y'_2; z'_2)$ . Сформулируйте условие параллельности этих прямых.

**194.** Прямая  $l$  имеет относительно координатного треугольника  $ABC$  уравнение

$$-2x + 5y - 3z = 0.$$

Какая из вершин  $A, B, C$  ближе, чем остальные, к прямой  $l$ ? Лежат ли вершины  $B$  и  $C$  по одну и ту же сторону или по разные стороны от прямой  $l$ ?

**195.** Известны Б-координаты вершин  $A, B, C$  «нового» базисного треугольника относительно «старого» базисного треугольника  $PQR$ :

$$A(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3); \quad B(\beta_1; \beta_2; \beta_3), \quad C(\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3).$$

Докажите, что если точка  $M$  относительно «старого» базисного треугольника  $PQR$  имеет Б-координаты  $(x_c; y_c; z_c)$ , то Б-координаты точки  $M$  относительно «нового» базисного треугольника  $ABC$  определяются по формулам

$$x_H = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y_H = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z_H = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_c & y_c & z_c \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_c & y_c & z_c \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

**196.** В треугольнике  $ABC$  через вершину  $B$  проведена прямая  $BB_1$  ( $B_1 \in [AC]$ ), которая отсекает от стороны  $AC$  одну треть, считая от вершины  $C$ . Через вершину  $A$  проведены две прямые  $AA_1$  и  $AA_2$ , которые делят сторону  $BC$  на три равные части. Зная площадь треугольника  $ABC$ , вычислите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AA_1, AA_2, BB_1, BC$ .

**197.** Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведены две прямые  $BB_1$  и  $BB_2$ , отсекающие от стороны  $AC$  по одной пятой (соответственно считая от вершин  $A$  и  $C$ ). Через вершину  $C$  тоже проведены две прямые  $CC_1$  и  $CC_2$ ; они отсекают от стороны  $AB$  по одной четверти, считая от вершин  $A$  и  $B$  соответственно. Зная площадь треугольника  $ABC$ , вычислите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ .

**198.** Внутри треугольника  $ABC$ , имеющего площадь 1, взята некоторая точка  $D$ . Через  $M_1, M_2, M_3$  обозначены центры тяжести треугольников  $DBC, DCA, DAB$ . Вычислите площадь треугольника  $M_1M_2M_3$ .

**199.** Докажите, что точка  $P(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$  в том и только в том случае принадлежит окружности  $\Gamma$ , описанной около базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ , если выполнено соотношение

$$\mu_1 |PA_1|^2 + \mu_2 |PA_2|^2 + \mu_3 |PA_3|^2 = 0.$$

**200.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  с длинами сторон  $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ . Докажите, что около четырехугольника  $ABCD$  в том и только в том случае можно описать окружность, если выполняется следующее равенство (условие Птолемея):

$$|AC| \cdot |BD| = ac + bd.$$

**201.** Докажите, что окружность, вписанная в базисный треугольник  $ABC$ , описывается уравнением

$$a^2 \left( p\mu_2 - \frac{b}{2} \right) \left( p\mu_3 - \frac{c}{2} \right) + b^2 \left( p\mu_1 - \frac{a}{2} \right) \left( p\mu_3 - \frac{c}{2} \right) + \\ + c^2 \left( p\mu_1 - \frac{a}{2} \right) \left( p\mu_2 - \frac{b}{2} \right) + S^2 = 0,$$

где  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ , а  $S$  — его площадь.

## § 14. Бариецентрические координаты в пространстве

Выберем в пространстве некоторый тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , который в дальнейшем будем называть *базисным* (или *координатным*). При любой загрузке четырех вершин тетраэдра действительными массами  $m_1, m_2, m_3, m_4$  с ненулевой суммой однозначно определена в пространстве точка, являющаяся центром масс этих м. т., и наоборот, для любой точки  $M$  возможно подобрать для вершин тетраэдра такие действительные (не обязательно положительные) массы  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  с суммой 1, чтобы центром этих масс оказалась точка  $M$ . Это доказывается так же, как и на плоскости (теорема 11). Такие числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  и будем называть *бариецентрическими координатами* (короче: Б-координатами) точки  $M$ .

Подобно тому как бариецентрические координаты относительно треугольника могут быть выражены через ориентированные площади некоторых треугольников, так и в пространстве бариецентрические координаты точки  $M$  относительно тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  могут быть выражены через некоторые объемы. Пусть сначала точка  $M$  лежит внутри базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Обозначим через  $v$  объем этого тетраэдра, а через  $v_1, v_2, v_3, v_4$  — объемы тетраэдров  $MA_2A_3A_4, A_1MA_3A_4, A_1A_2MA_4, A_1A_2A_3M$ . Тогда, как будет доказано ниже, Б-координатами точки  $P$  будут числа

$$\mu_1 = \frac{v_1}{v}, \quad \mu_2 = \frac{v_2}{v}, \quad \mu_3 = \frac{v_3}{v}, \quad \mu_4 = \frac{v_4}{v}. \quad (49)$$

Если же  $M$  — произвольная точка пространства (не обязательно лежащая внутри базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ ), то формулы (49) останутся справедливыми, если под  $v, v_1, v_2, v_3, v_4$  понимать *ориентированные* объемы соответствующих тетраэдров, т. е. их объемы, взятые с некоторыми знаками. Это в данном случае можно пояснить так. Ориентированный объем  $v$  базисного тетраэдра условимся считать положительным; ориентированный объем  $v_1$  тетраэдра  $MA_2A_3A_4$  будем считать по-

ложительным, если тетраэдр  $MA_2A_3A_4$  расположен по ту же сторону от плоскости  $A_2A_3A_4$ , что и базисный тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$ , и отрицательным, если тетраэдр  $MA_2A_3A_4$  и базисный тетраэдр расположены по разные стороны от плоскости  $A_2A_3A_4$ . Аналогично определяются ориентированные объемы  $v_2, v_3, v_4$  тетраэдров  $A_1MA_3A_4, A_1A_2MA_4, A_1A_2A_3M$ .

Доказательство формул (49) удобно провести с помощью понятия внешнего (или смешанного) произведения трех векторов в пространстве. Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  — три вектора в пространстве, заданные своими координатами в некоторой прямоугольной системе:

$$\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3), \quad \mathbf{b}(b_1; b_2; b_3), \quad \mathbf{c}(c_1; c_2; c_3).$$

Определитель, составленный из координат этих векторов, назовем *внешним произведением* рассматриваемых векторов и обозначим его через  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей непосредственно вытекает, что справедливы следующие равенства (которые можно назвать аксиомами внешнего произведения трех векторов):

- 1)  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ;
- 2)  $(k\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ ;
- 3)  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} =$   
 $= -\mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$

(в частности, при перестановке любых двух векторов внешнее произведение меняет знак);

4)  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 1$ , где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — единичные векторы, имеющие направление осей рассматриваемой прямоугольной системы.

Из первых трех свойств вытекает, что свойства, аналогичные 1) и 2), справедливы по отношению не только к первому сомножителю, но и к остальным; например,

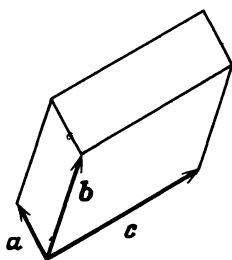
$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{c} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{c}.$$

Далее, если два сомножителя совпадают, то внешнее произведение равно нулю; например,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0$ .

Оказывается, что в пространстве справедлива формула, аналогичная (35). Именно, будем говорить, что тройка векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ориентирована *положительно* (или так же, как тройка  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ), если  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} > 0$ , и *отрицательно* (т. е. противоположно тройке  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ), если  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} < 0$ . (В практических применениях, например, в физике одинаковую или противо-



положительную ориентацию двух троек векторов определяют с помощью правила правой руки или с помощью правила буравчика.) Если теперь  $P$  — параллелепипед, построенный на тройке векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  (рис. 73), то мы условимся брать его объем со знаком плюс, если тройка  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ориентирована положительно, и со знаком минус, если эта тройка ориентирована отрицательно; это и дает *ориентированный объем* рассматриваемого параллелепипеда. Теперь формула, аналогичная (35), может быть записана в виде



$$v = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \quad (50)$$

Рис. 73.

где  $v$  — ориентированный объем параллелепипеда, построенного на тройке векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ . Доказательство этой формулы намечено в задачах 209 — 212.

Пусть теперь  $ABCD$  — произвольный тетраэдр, вершины которого заданы именно в этом порядке:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Объем этого тетраэдра равен  $\frac{1}{6}|\vec{v}|$ , где  $v$  — объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  (рис. 74). Действительно, объем этого тетраэдра равен  $\frac{1}{3}sh$ , где  $s$  — площадь треугольника  $ABC$  и  $h$  — соответствующая высота, а объем параллелепипеда

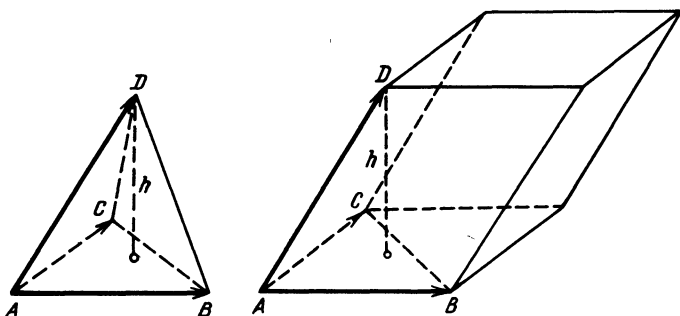


Рис. 74.

равен  $(2s)h$ , поскольку у этого параллелепипеда та же высота, а основание имеет вдвое большую площадь. Таким образом, объем тетраэдра равен  $\frac{1}{6}|\vec{AB} \wedge \vec{AC} \wedge \vec{AD}|$ . Будем называть число

$$\frac{1}{6} \vec{AB} \wedge \vec{AC} \wedge \vec{AD}$$

*ориентированным объемом тетраэдра  $ABCD$*  и условимся обозначать его через  $v_{ABCD}$ .

Заметим, что при перестановке любых двух вершин ориентированный объем тетраэдра меняет знак; например,  $v_{ABCD} = -v_{BACD}$ . В самом деле,

$$v_{BACD} = \vec{BA} \wedge \vec{BC} \wedge \vec{BD} = -\vec{AB} \wedge (\vec{AC} - \vec{AB}) \wedge (\vec{AD} - \vec{AB});$$

раскрывая скобки и учитывая, что внешнее произведение с двумя одинаковыми сомножителями равно нулю, получаем

$$v_{BACD} = -\vec{AB} \wedge \vec{AC} \wedge \vec{AD} = -v_{ABCD}.$$

Теперь доказательство формул (49) завершается примерно так же, как и в плоском случае. Пусть  $ABCD$  — базисный тетраэдр и  $M$  — произвольная точка пространства. Обозначим векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$  через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ . Тогда для ориентированных объемов справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_{MBCD} + v_{AMCD} + v_{ABMD} + v_{ABCM} &= \\ &= v_{MBCD} - v_{MACD} + v_{MABD} - v_{MABC} = \\ &= \frac{1}{6} \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} - \frac{1}{6} \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \frac{1}{6} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} - \frac{1}{6} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}; \\ v_{ABCD} &= \frac{1}{6} \vec{AB} \wedge \vec{AC} \wedge \vec{AD} = \frac{1}{6} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{d} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в последнем выражении, убеждаемся, что правые части в обоих равенствах совпадают, т. е.

$$v_{ABCD} = v_{MBCD} + v_{AMCD} + v_{ABMD} + v_{ABCM}. \quad (51)$$

Это равенство аналогично соотношению (36) для ориентированных площадей.

Далее, так как  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  — четыре вектора пространства, то какой-либо из них выражается через три других. Пусть, например,  $\mathbf{a} = k\mathbf{b} + l\mathbf{c} + m\mathbf{d}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{b} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{d} = \\ = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) (k\mathbf{b} + l\mathbf{c} + m\mathbf{d}) - ((k\mathbf{b} + l\mathbf{c} + m\mathbf{d}) \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{b} + \\ + ((k\mathbf{b} + l\mathbf{c} + m\mathbf{d}) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{c} - ((k\mathbf{b} + l\mathbf{c} + m\mathbf{d}) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в правой части, получаем  $\vec{0}$ . Доказанное таким образом соотношение

$$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{b} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \mathbf{d} = \vec{0}$$

можно (умножив его на  $\frac{1}{6v_{ABCD}}$ ) переписать в виде

$$\frac{v_{MBCD}}{v_{ABCD}} \mathbf{a} + \frac{v_{AMCD}}{v_{ABCD}} \mathbf{b} + \frac{v_{ABMD}}{v_{ABCD}} \mathbf{c} + \frac{v_{ABCM}}{v_{ABCD}} \mathbf{d} = \vec{0}.$$

Иначе говоря, числа (49) удовлетворяют соотношению

$$\mu_1 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \mu_3 \mathbf{c} + \mu_4 \mathbf{d} = \vec{0}$$

и, кроме того (в силу доказанного равенства (51)), соотношению

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1.$$

Но это и означает, что числа (49) являются барицентрическими координатами точки  $M$ .

**Пример 51.** Найдем барицентрические координаты центра  $O$  шара, вписанного в базисный тетраэдр  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

**Решение.** Пусть  $r$  — радиус вписанного шара;  $s_1, s_2, s_3, s_4$  — площади граней, противолежащих вершинам  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Точка  $O$  лежит, очевидно, внутри базисного тетраэдра. Объемы  $v_1, v_2, v_3, v_4, v$  тетраэдров  $OA_1 A_3 A_4, A_1 O A_3 A_4, A_1 A_2 O A_4, A_1 A_2 A_3 O, A_1 A_2 A_3 A_4$  имеют следующие значения:

$$v_1 = \frac{1}{3} s_1 r, v_2 = \frac{1}{3} s_2 r, v_3 = \frac{1}{3} s_3 r, v_4 = \frac{1}{3} s_4 r, v = \frac{1}{3} s r$$

( $s$  — полная поверхность тетраэдра). Теперь барицентрические координаты точки  $O$  находим по формулам (49)

$$O \left( \frac{s_1}{s}; \frac{s_2}{s}; \frac{s_3}{s}; \frac{s_4}{s} \right).$$

В заключение этого параграфа заметим, что, пользуясь формулой Лагранжа, можно, рассуждая аналогично тому, как это было сделано в плоском случае (см. (31)), получить формулы для расстояния между двумя точками  $P$  и  $Q$  в пространстве, если известны их Б-координаты  $(p_1; p_2; p_3; p_4)$  и  $(q_1; q_2; q_3; q_4)$ :

$$|PQ|^2 = - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (p_i - q_i)(p_j - q_j) |A_i A_j|^2. \quad (52)$$

**Пример 52.** Известны длины всех ребер тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ; вычислим длину отрезка, соединяющего вершину  $A_4$  с центроидом треугольника  $A_1 A_2 A_3$ .

**Решение.** Примем  $A_1 A_2 A_3 A_4$  за базисный тетраэдр. В данном случае  $P = A_4 (0; 0; 0; 1)$ ,  $Q = A'_4 \left( \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0 \right)$ . По формуле (52) находим (после очевидных упрощений)

$$|A_4 A'_4|^2 = \frac{1}{9} (3(|A_4 A_1|^2 + |A_4 A_2|^2 + |A_4 A_3|^2) - (|A_1 A_2|^2 + |A_1 A_3|^2 + |A_2 A_3|^2)).$$

Эту формулу можно было бы также получить, разместив в точках  $A_1, A_2, A_3$  массы 1, 1, 1 и применяя формулы Лагранжа и Якоби:

$$J_{A_4} = J_{A'_4} + 3|A_4 A'_4|^2, J_{A'_4} = \frac{1}{3} (|A_1 A_2|^2 + |A_1 A_3|^2 + |A_2 A_3|^2).$$

### Задачи

**202.** Какие барицентрические координаты имеет центр шара, касающегося грани  $A_2A_3A_4$  базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  и продолжений трех остальных его граней?

**203.** В треугольной пирамиде  $DABC$  три ребра  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  взаимно перпендикулярны и имеют длины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; точка  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $D$  на грань  $ABC$ ,  $S$  — центр шара, описанного около пирамиды. Вычислите Б-координаты точек  $H$  и  $S$ .

**204.** В тетраэдре  $DABC$  три ребра, сходящиеся в вершине  $D$ , взаимно перпендикулярны. Лежит ли центр шара, описанного вокруг тетраэдра, в плоскости грани  $ABC$ ?

**205.** Докажите, что если в тетраэдре  $DABC$  три ребра, сходящиеся в вершине  $D$ , взаимно перпендикулярны, то вершина  $D$ , точка пересечения медиан грани  $ABC$  и центр шара, описанного около тетраэдра, лежат на одной прямой.

**206.** Пусть  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — три ненулевых вектора, не параллельных одной плоскости. Докажите, что любой четвертый вектор  $\mathbf{d}$  пространства может быть выражен через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

причем коэффициенты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеют следующие значения:

$$x = \frac{\mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}, \quad y = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}, \quad z = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}.$$

**207.** Докажите, что решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (53)$$

равносильно нахождению чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , удовлетворяющих равенству

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{d},$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  — векторы, имеющие координаты  $(a_1; a_2; a_3)$ ,  $(b_1; b_2; b_3)$ ,  $(c_1; c_2; c_3)$ ,  $(d_1; d_2; d_3)$ .

**208.** Докажите (используя результаты двух предыдущих задач), что если ввести обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

то при  $\Delta \neq 0$  система (53) имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

**209.** Докажите, что если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  направлены по осям координат, то формула (50) справедлива.

**210.** Докажите, что ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c} + k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ , равен ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

**211.** Докажите, что если формула (50) справедлива для векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , то она справедлива и для векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c} + k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ .

**212.** Используя результаты задач 209 и 211, докажите, что формула (50) справедлива для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

**213.** Сформулируйте и докажите пространственное обобщение утверждения, содержащегося в задаче 169.

## **§ 15. Бариеентрические координаты в многомерных пространствах**

При решении системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными выше было использовано внешнее произведение двух векторов на плоскости (задачи 180–182). В случае трех уравнений с тремя неизвестными уже приходится рассматривать векторы в трехмерном пространстве (задачи 206–208). При решении системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными нужно будет для получения геометрической интерпретации использовать  $n$ -мерное пространство. Так потребности алгебры диктуют необходимость расширения наших геометрических представлений, необходимость рассмотрения пространств, имеющих более трех измерений. Многие другие задачи из различных разделов математики и ее приложений (к физике, химии, биологии, экономике и т. д.) также естественно приводят к необходимости рассматривать многомерные пространства.

В этом параграфе мы расскажем о простейших фактах геометрии  $n$ -мерного пространства и заключим этот рассказ рассмотрением бариеентрических координат в  $n$ -мерном пространстве и некоторых их приложений.

Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждый вектор задается двумя координатами:  $\mathbf{a} = (x; y)$ . В трехмерном пространстве (в котором фиксирована прямоугольная система координат) каждый вектор задается тремя координатами:  $\mathbf{a} = (x; y; z)$ . По аналогии с этим будем говорить, что в  $n$ -мерном пространстве вектор задается в виде кортежа (конечной последовательности)  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ , состоящего из  $n$  действительных чисел, которые называются *координатами* этого вектора. Запись  $\mathbf{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  означает, что через  $\mathbf{a}$  обозначен вектор с координатами  $x_1; x_2; \dots; x_n$ . Множество всех векторов  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  (получаемых, когда  $x_1; x_2; \dots; x_n$  принимают произвольные значения) обозначается через  $\mathbf{R}^n$  и называется

*n*-мерным пространством (а иногда *n*-мерным арифметическим пространством).

При изучении геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве сумма векторов определялась геометрически, а затем доказывалось, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются. Так, на плоскости, если  $\mathbf{a} = (x; y)$ ,  $\mathbf{b} = (x'; y')$ , то  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x + x'; y + y')$ . В пространстве, если  $\mathbf{a} = (x; y; z)$ ,  $\mathbf{b} = (x'; y'; z')$ , то  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$ . В *n*-мерном пространстве  $\mathbf{R}^n$  (при  $n > 3$ ) у нас нет непосредственных «геометрических» представлений, т. е. «видеть» фигуры в таком пространстве (в буквальном, физическом смысле этого слова) не может никто, даже самый гениальный математик. Но по аналогии с плоскостью и трехмерным пространством мы можем определить сумму векторов в  $\mathbf{R}^n$  при помощи сложения одноименных координат. Иначе говоря, суммой векторов

$$\mathbf{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \text{ и } \mathbf{b} = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$$

пространства  $\mathbf{R}^n$  называется вектор, имеющий координаты

$$(x_1 + x'_1; x_2 + x'_2; \dots; x_n + x'_n);$$

этот вектор обозначается через  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

Далее, на плоскости и в пространстве вектор  $k\mathbf{a}$  определяется геометрически: длина вектора  $k\mathbf{a}$  равна  $|k| |\mathbf{a}|$ , причем вектор  $k\mathbf{a}$  параллелен вектору  $\mathbf{a}$ , а направление его одинаково с направлением вектора  $\mathbf{a}$  при  $k > 0$  и противоположно ему при  $k < 0$ . Алгебраически же (в координатах) умножение вектора  $\mathbf{a}$  на число  $k$  сводится к умножению всех координат вектора  $\mathbf{a}$  на  $k$ . Иначе говоря, на плоскости: если  $\mathbf{a} = (x; y)$ , то  $k\mathbf{a} = (kx; ky)$  (и аналогично в пространстве: если  $\mathbf{a} = (x; y; z)$ , то  $k\mathbf{a} = (kx; ky; kz)$ ). В  $\mathbf{R}^n$  пока мы не знаем, что такое «длина» вектора и его «направление», нельзя геометрически определить вектор  $k\mathbf{a}$ . Однако по аналогии с плоскостью и трехмерным пространством мы можем ввести следующее определение: если  $\mathbf{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  — произвольный вектор пространства  $\mathbf{R}^n$  и  $k$  — действительное число, то  $k\mathbf{a}$  есть вектор с координатами  $(kx_1; kx_2; \dots; kx_n)$ .

Вспомним теперь, что на плоскости мы часто рассматриваем единичные векторы, направленные по осям координат. Если эти векторы обозначить через  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , то для любого вектора  $\mathbf{a} = (x; y)$  справедливо соотношение  $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ . Иначе говоря, любой вектор  $\mathbf{a}$  можно разложить по векторам  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и коэффициенты  $x$ ,  $y$  этого разложения как раз совпадают с координатами вектора  $\mathbf{a}$ . Аналогично дело обстоит и в пространстве: если  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  — единичные векторы, имеющие направление осей коор-

динат, то для любого вектора  $\mathbf{a} = (x; y; z)$  справедливо соотношение  $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ . Нетрудно теперь доказать, что в  $\mathbf{R}^n$  справедливо аналогичное соотношение. С этой целью заметим, что на плоскости мы имеем  $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$  и, аналогично, в трехмерном пространстве  $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0; 1; 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0; 0; 1)$ . Мы можем ввести в  $\mathbf{R}^n$  аналогичные векторы:

$$\mathbf{e}_1 = (1; 0; \dots; 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1; \dots; 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$$

(т. е. у вектора  $\mathbf{e}_i$  на  $i$ -м месте стоит 1, а остальные координаты равны нулю); они называются *единичными базисными векторами* в  $\mathbf{R}^n$ . Теперь нетрудно проверить, что для любого вектора  $\mathbf{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  в  $\mathbf{R}^n$  справедливо соотношение

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

т. е. любой вектор  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  выражается (и притом, как легко видеть, однозначно) через базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Напомним теперь, что на плоскости (или в трехмерном пространстве) каждому двум точкам  $A, B$  сопоставляется вектор  $\overrightarrow{AB}$ . По аналогии с этим и в  $n$ -мерной геометрии рассматривают точки и считают, что каждому двум точкам  $A, B$  сопоставляется некоторый вектор  $\overrightarrow{AB}$ , причем выполняются следующие условия (которые поясняют свойства точек и позволяют рассуждать о них):

1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  для любых точек  $A, B, C$ ;

2) для любой точки  $A$  и любого вектора  $\mathbf{a}$  существует (и притом только одна) точка  $B$ , для которой  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ .

Фиксируем теперь некоторую точку  $O$  (начало координат). Для любой точки  $A$  мы можем рассмотреть вектор  $\overrightarrow{OA}$ ; его координаты принимаются за координаты точки  $A$ , т. е. если  $\overrightarrow{OA} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ , то пишут также  $A(x_1; x_2; \dots; x_n)$ . Если теперь  $A$  и  $B$  — две точки с координатами  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  и  $(y_1; y_2; \dots; y_n)$ , т. е.  $\overrightarrow{OA} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ , то из равенства  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  легко следует, что вектор  $\overrightarrow{AB}$  имеет координаты  $(y_1 - x_1; y_2 - x_2; \dots; y_n - x_n)$ .

Чтобы «заселить» пространство  $\mathbf{R}^n$  дальнейшими образами, привычными для нас из элементарной геометрии (прямая, отрезок, выпуклая фигура, многогранник, вершины и ребра многогранника и т. п.), удобно воспользоваться понятиями «материальная точка» и «центр масс системы материальных точек».

Определения этих понятий можно дословно перенести из обычного двумерного или трехмерного пространства: *материальная точка*  $mA$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$  — это пара, составленная из точки  $A$  и действительного числа  $m$  (массы этой м. т.).

Центром масс системы материальных точек

$$m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_p A_p \quad (54)$$

с ненулевой суммарной массой  $m_1 + m_2 + \dots + m_p$  называется точка  $Z(z_1; z_2; \dots; z_n)$  пространства  $\mathbf{R}^n$ , которая удовлетворяет условию

$$m_1 \overrightarrow{ZA_1} + m_2 \overrightarrow{ZA_2} + \dots + m_p \overrightarrow{ZA_p} = \vec{0},$$

или (что равносильно этому)

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_p \overrightarrow{OA_p}}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}.$$

Это равенство можно записать в сокращенных обозначениях:

$$Z = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_p A_p}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}.$$

Отсюда видно, что каждая система материальных точек в  $\mathbf{R}^n$  с ненулевой суммарной массой имеет и притом единственный центр масс.

С помощью понятия центра масс можно определить в  $\mathbf{R}^n$  понятие *отрезка*  $[AB]$ : это — множество таких точек пространства  $\mathbf{R}^n$ , которые могут служить центрами неотрицательных масс с ненулевой суммой, помещенных в точках  $A$  и  $B$ . Это можно записать короче так:

$$[AB] = \left\{ Z \in \mathbf{R}^n: Z = \frac{m_1 A + m_2 B}{m_1 + m_2}; m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_1 + m_2 > 0 \right\}.$$

Аналогичным определением можно ввести понятие *прямой*  $(AB)$ :

$$(AB) = \left\{ Z \in \mathbf{R}^n: Z = \frac{m_1 A + m_2 B}{m_1 + m_2}; m_1 + m_2 \neq 0 \right\}.$$

Заметим, что если  $Z$  — центр масс системы м. т. (54), то при  $k \neq 0$   $Z$  будет центром масс и системы м. т.  $(km_1) A_1, (km_2) A_2, \dots, (km_p) A_p$ . Поэтому мы всегда можем считать сумму масс равной единице, т. е. в определении отрезка и прямой можно считать, что  $m_1 + m_2 = 1$ . Например,

$$[AB] = \{ Z \in \mathbf{R}^n: Z = m_1 A + m_2 B; m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_1 + m_2 = 1 \}.$$

Пусть в пространстве  $\mathbf{R}^n$  выбраны несколько точек  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$ . Множество всех точек, которые могут оказаться центрами неотрицательных масс с ненулевой суммой, помещенных в этих точках, будем называть *оболочкой* этих точек. Например, оболочка одной точки совпадает с этой точкой; оболочка двух точек — это соединяющий их отрезок.



Всякое множество точек в  $\mathbf{R}^n$  условимся называть *фигурой*. Фигура  $M \subset \mathbf{R}^n$  называется *выпуклой*, если для любых двух точек  $A \in M$  и  $B \in M$  весь отрезок  $[AB]$  содержится в фигуре  $M$ .

**Теорема 16.** *Оболочка нескольких точек в  $\mathbf{R}^n$  является выпуклой фигурой.*

**Доказательство.** Пусть  $M$  — оболочка точек  $P_1, \dots, P_k$ . Пусть  $A$  и  $B$  — две точки фигуры  $M$ , и пусть  $C$  — какая-либо точка отрезка  $[AB]$ . Тогда можно точки  $A$  и  $B$  загрузить такими неотрицательными массами  $m_1$  и  $m_2$ ,  $m_1 + m_2 = 1$ , что  $C$  будет их центром:  $C = m_1 A + m_2 B$ . Так как  $A \in M$ , а  $M$  — оболочка точек  $P_1, \dots, P_k$ , то  $A$  — центр неотрицательных масс  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ( $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ ), помещенных соответственно в точках  $P_1, \dots, P_k$ , т. е.  $A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k$ . Аналогично можно загрузить точки  $P_1, \dots, P_k$  такими массами  $\beta_1, \dots, \beta_k$  ( $\beta_1 + \dots + \beta_k = 1$ ), что их центром окажется точка  $Q$ , т. е.  $Q = \beta_1 P_1 + \dots + \beta_k P_k$ . Но тогда

$$C = m_1 (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k) + m_2 (\beta_1 P_1 + \dots + \beta_k P_k) = \\ = (m_1 \alpha_1 + m_2 \beta_1) P_1 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \beta_2) P_2 + \dots + (m_1 \alpha_k + m_2 \beta_k) P_k,$$

причем  $(m_1 \alpha_1 + m_2 \beta_1) + \dots + (m_1 \alpha_k + m_2 \beta_k) = m_1 (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + m_2 (\beta_1 + \dots + \beta_k) = m_1 + m_2 = 1$ . Таким образом,  $C$  — центр некоторых неотрицательных масс с ненулевой суммой, помещенных в точках  $P_1, \dots, P_k$ . Поэтому,  $C \in M$ . Итак, из  $C \in [AB]$  следует  $C \in M$ ; значит,  $M$  — выпуклая фигура.

Заметим, что в силу этой теоремы вместо термина «оболочка» часто употребляют термин «выпуклая оболочка».

Будем говорить, что  $n$  векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$  *линейно независимы*, если ни один из них не выражается через остальные  $n - 1$  векторов; например, линейно независимыми являются базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ . Далее,  $n + 1$  точек  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$  будем называть *независимыми*, если линейно независимы векторы  $\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ . Например, если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — такие точки, что  $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OA_2} = \mathbf{e}_2, \dots, \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{e}_n$ , то точки  $O, A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы.

Если точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в  $\mathbf{R}^n$  независимы, то их выпуклая оболочка называется  *$n$ -мерным симплексом*, а сами точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  называются *вершинами* этого симплекса. Например, при  $n = 2$  (т. е. на плоскости) симплекс является выпуклой оболочкой трех точек, не лежащих на одной прямой, т. е. представляет собой *треугольник*. В трехмерном пространстве ( $n = 3$ ) симплекс представляет собой выпуклую оболочку четырех точек, не лежащих в одной плоскости, т. е. *тетраэдр*. Таким образом, симплекс представляет собой многомерное обобщение треугольника и тетраэдра.

Обозначим через  $S$  симплекс с вершинами  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$ . Так как  $S$  — выпуклая оболочка точек  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , то каждая точка  $P$  этого симплекса является центром каких-то неотрицательных масс (с ненулевой суммой), помещенных в вершинах  $A_0, A_1, \dots, A_n$ . Мы можем при этом считать (умножив, если нужно, все массы на некоторое число  $k > 0$ ), что сумма масс равна 1. Обозначив эти неотрицательные массы через  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ , мы получаем

Эти числа  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  называются *барицентрическими координатами* точки  $P$  относительно базисного симплекса  $S$ . Оказывается, что и любая точка  $P \in \mathbf{R}^n$  записывается однозначно в виде (55) (но только если  $P \notin S$ , то некоторые из чисел  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  будут отрицательными); доказывается это аналогично тому, как это было сделано для плоскости (см. теорему 11) или для трехмерного пространства. Итак, любая точка  $P \in \mathbf{R}^n$  однозначно задается своими Б-координатами  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  (см. (55)) относительно заданного базисного симплекса  $S = [A_0 A_1 \dots A_n]$ .

**Теорема 17.** В пространстве  $\mathbf{R}^n$  каждым  $n$  векторам  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  (заданным в определенном порядке) можно сопоставить некоторое число  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n$  (называемое внешним произведением этих векторов), удовлетворяющее следующим четырем аксиомам:

$$2) (k\mathbf{a}_1) \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = k(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n);$$

3) при перестановке любых двух сомножителей внешнее произведение меняет знак;

Указанными четырьмя аксиомами внешнее произведение  $n$  векторов в  $\mathbf{R}^n$  определяется однозначно.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{a}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{a}_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n. \end{array} \right.$$

Здесь второй индекс у числа  $a_{ij}$  соответствует номеру вектора  $\mathbf{a}_j$ , а первый индекс — номер координаты этого вектора. Таким образом,

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n) \wedge \\ \wedge (a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n2}\mathbf{e}_2) \wedge \dots \wedge (a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n).$$

Если в правой части раскрыть скобки, то получится сумма всевозможных произведений

$$(a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1}) \wedge (a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2}) \wedge \dots \wedge (a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}),$$

где каждый из индексов  $i_1, i_2, \dots, i_n$  может принимать любые значения  $1, 2, \dots, n$  (т. е. из каждой скобки можно взять любое из стоящих в ней  $n$  слагаемых). Иначе говоря,

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \sum (a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}) \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_n}. \quad (56)$$

Но внешнее произведение с двумя одинаковыми сомножителями равно нулю. (Это следует из аксиом.) Поэтому в сумме (56) надо взять лишь такие слагаемые, в которых все числа  $i_1, i_2, \dots, i_n$  различны. Но если числа  $i_1, i_2, \dots, i_n$  различны, то внешнее произведение  $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_n}$  равно  $\pm 1$  (в силу аксиом 3 и 4), причем оно должно быть равно  $+1$ , если кортеж индексов  $i_1, i_2, \dots, i_n$  может быть приведен к основному кортежу  $1, 2, \dots, n$  при помощи четного числа *транспозиций* (транспозицией называется перемена местами двух каких-либо индексов), и должно быть равно  $-1$  в случае нечетного числа транспозиций<sup>1)</sup>. Таким образом,

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \sum \pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \quad (57)$$

где суммирование распространено на всевозможные кортежи  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , составленные из чисел  $1, 2, \dots, n$ , и знак плюс соответствует четным кортежам (получающимся из основного кортежа  $1, 2, \dots, n$  четным числом транспозиций), а знак минус — нечетным. Так как число, стоящее в правой части соотношения (57), однозначно определено, то отсюда и вытекает единственность внешнего произведения векторов.

<sup>1)</sup> При этом следует доказать, что любые два способа приведения данного кортежа  $i_1, i_2, \dots, i_n$  к основному кортежу  $1, 2, \dots, n$  требуют таких количеств транспозиций, которые имеют одинаковую четность. Это вытекает из следующих соображений. Рассмотрим все разности  $i_k - i_l$ , для которых  $k > l$ . Если среди этих разностей имеется  $p$  отрицательных чисел, то условимся говорить, что в кортеже  $i_1, i_2, \dots, i_n$  имеется  $p$  беспорядков. Легко проверяется, что если в кортеже  $i_1, i_2, \dots, i_n$  произвести одну транспозицию, то число беспорядков изменит свою четность. В основном кортеже  $1, 2, \dots, n$  число беспорядков равно нулю (т. е. четно). Из этого нетрудно вывести, что кортеж, имеющий четное число беспорядков, может быть приведен к основному кортежу  $1, 2, \dots, n$  лишь с помощью четного числа транспозиций (и аналогично при нечетном числе беспорядков).

Формула (57) подсказывает и путь доказательства существования: надо определить внешнее произведение  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n$  формулой (57) и проверить, что при таком определении оно удовлетворяет аксиомам 1) — 4). Такая проверка не представляет труда. Например, для проверки аксиомы 2) заметим, что в каждом слагаемом, стоящем в сумме (57), имеется ровно один сомножитель вида  $a_{i1}$  (т. е. сомножитель со вторым индексом 1). Но сомножитель  $a_{i1}$  представляет собой  $i$ -ю координату вектора  $\mathbf{a}_1$ . При умножении вектора  $\mathbf{a}_1$  на число  $k$  все его координаты умножаются на  $k$ , т. е. в каждом слагаемом суммы (57) ровно один сомножитель умножается на  $k$ , а потому и вся сумма умножается на  $k$ .

Равенству (57), участвующему в доказанной теореме, можно придать и другую форму. Условимся число, стоящее в правой части равенства (57), обозначать через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и называть *определителем*  $n$ -го порядка, у которого в  $i$ -м столбце стоят координаты вектора  $\mathbf{a}_i$  (в связи с чем  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называют «векторами-столбцами» этого определителя). Тогда равенство (57) переписется в виде

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

Таким образом, определитель (57) представляет собой «координатную» запись внешнего произведения  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n$ .

Аксиомы 1) — 4) внешнего произведения могут быть переписаны с помощью определителей и выражают основные их свойства. Так, аксиомы 1) и 2) принимают вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а аксиома 3) означает, что при перестановке каких-либо двух столбцов определитель меняет знак. Добавим к этим свойствам еще два легко доказываемых свойства: а) при замене строк столбцами (т. е. при «симметричном отражении определителя относительно главной диагонали») определитель не изменяется; б) если все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали (и то же справедливо, если все его элементы выше главной диагонали равны нулю).

**Теорема 18.** Пусть  $[A_0 A_1 \dots A_n]$  — базисный симплекс и  $M$  — произвольная точка пространства  $\mathbf{R}^n$ . Обозначим векторы  $\overrightarrow{MA_0}, \overrightarrow{MA_1}, \dots, \overrightarrow{MA_n}$  через  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Тогда Б-координаты точки  $M$  имеют следующие значения:

$$\mu_0 = \frac{v_0}{v}, \mu_1 = -\frac{v_1}{v}, \mu_2 = \frac{v_2}{v}, \mu_3 = -\frac{v_3}{v}, \dots, \mu_n = (-1)^n \frac{v_n}{v}, \quad (58)$$

где  $v_i = \mathbf{a}_0 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n$  (пропущен вектор  $\mathbf{a}_i$ ) и  $v = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \wedge (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0)$ .

**Доказательство.** Так как число векторов  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  равно  $n+1$ , то какой-либо из них выражается через остальные. Пусть, скажем,

$$\mathbf{a}_0 = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v &= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \wedge (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n - \\ &- \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n - \dots - \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \\ &\dots \wedge \mathbf{a}_{n-1} \wedge \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n + \\ &+ \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n - \dots + (-1)^n \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{n-1} = \\ &= v_0 - v_1 + v_2 - \dots + (-1)^n v_n. \end{aligned}$$

Далее, легко проверить, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n) \mathbf{a}_0 - (\mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n) \mathbf{a}_1 + \dots \\ \dots + (-1)^n (\mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{n-1}) \mathbf{a}_n = \vec{0} \end{aligned}$$

(для этого нужно вместо  $\mathbf{a}_0$  подставить  $k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n$

$$v_0 \mathbf{a}_0 - v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 - \dots + (-1)^n v_n \mathbf{a}_n = \vec{0}.$$

Следовательно, числа (58) удовлетворяют соотношению

$$\mu_0 \mathbf{a}_0 + \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n = \vec{0}.$$

Кроме того (в силу доказанного выше соотношения  $v = v_0 - v_1 + v_2 + \dots + (-1)^n v_n$ ), они удовлетворяют соотношению

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n = 1.$$

Но это и означает, что числа (58) являются барицентрическими координатами точки  $M$ .

Доказанная теорема позволяет записать барицентрические координаты в виде отношения определителей (поскольку каждое из чисел  $v, v_0, v_1, \dots, v_n$  задается в виде внешнего произведения векторов, т. е. может быть записано в виде определителя). Можно также придать этой теореме и другой вид с помощью понятия « $n$ -мерного объема». Укажем вкратце, как это делается.

Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — линейно независимые векторы в  $\mathbf{R}^n$  и  $A$  — некоторая точка. Множество  $P$  всех точек  $M$ , для которых

$$\overrightarrow{AM} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n;$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1,$$

называется  $n$ -мерным *параллелепипедом*, построенным на векторах  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ; число  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n$  называется  $n$ -мерным *ориентированным объемом* этого параллелепипеда. (Это определение согласуется с формулами для вычисления площадей и объемов на плоскости и в трехмерном пространстве.) Далее, пусть  $S$  — симплекс с вершинами  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$ . Считается <sup>1)</sup>, что  $n$ -мерный ориентированный

объем этого симплекса равен  $\frac{1}{n!} v_P$ , где  $v_P$  — ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ , т. е.

$$v_{A_0 A_1 \dots A_n} = \frac{1}{n!} \overrightarrow{A_0 A_1} \wedge \overrightarrow{A_0 A_2} \wedge \dots \wedge \overrightarrow{A_0 A_n}.$$

<sup>1)</sup> Это утверждение можно доказать, если построить в  $\mathbf{R}^n$  геометрическую теорию  $n$ -мерных объемов. В этой теории  $n$ -мерный объем пирамиды равен  $\frac{1}{n} Sh$ , где  $S$  есть  $(n-1)$ -мерный объем основания, а  $h$  — высота. В свою очередь, если  $S$  есть  $(n-1)$ -мерная пирамида, то  $S = \frac{1}{n-1} S'h'$ , и т. д., откуда и вытекает написанная формула. Мы оставляем все эти вопросы в стороне.

Из этой формулы несложно выводится, что при перестановке (транспозиции) двух вершин симплекса его  $n$ -мерный ориентированный объем меняет знак; например,  $v_{A_1 A_0 A_2 \dots A_n} = -v_{A_0 A_1 A_2 \dots A_n}$ . Легко видеть, что (при сохранении обозначений теоремы 18)

$$\begin{aligned} v &= (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \wedge (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0) = n! v_{A_0 A_1 \dots A_n}; \\ v_0 &= \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = n! v_{MA_1 A_2 \dots A_n}; \\ v_1 &= \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = n! v_{MA_0 A_2 \dots A_n} = -n! v_{A_0 M A_1 A_2 \dots A_n}, \end{aligned}$$

и, вообще,

$$v_i = (-1)^i \cdot n! v_{A_0 A_1 \dots A_{i-1} M A_{i+1} \dots A_n}.$$

Из этих формул следует, что (в полном соответствии с формулами, ранее полученными для плоскости и трехмерного пространства)

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{v_{MA_1 A_2 \dots A_n}}{v_{A_0 A_1 \dots A_n}}, \quad \mu_1 = \frac{v_{A_0 M A_2 \dots A_n}}{v_{A_0 A_1 \dots A_n}}, \\ \mu_2 &= \frac{v_{A_0 A_1 M A_3 \dots A_n}}{v_{A_0 A_1 \dots A_n}}, \quad \dots, \quad \mu_n = \frac{v_{A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} M}}{v_{A_0 A_1 \dots A_n}}. \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим вопрос о нахождении *расстояний* и *углов* в пространстве  $\mathbf{R}^n$  с помощью скалярного произведения и с помощью барицентрических координат. На плоскости и в трехмерном пространстве скалярное произведение определяется формулой

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha, \quad (59)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Скалярное произведение удобно тем, что оно обладает удачными алгебраическими свойствами:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad (k\mathbf{a})\mathbf{b} = k(\mathbf{ab}), \quad (60)$$

кроме того (поскольку  $\cos 0 = 1$ ),

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2. \quad (61)$$

Из этих формул вытекает, что для любых векторов  $\mathbf{a}_1 = (x_1; y_1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (x_2; y_2)$  на плоскости мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 &= (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2)(x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) = \\ &= (x_1 x_2) \mathbf{e}_1^2 + (x_1 y_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (y_1 x_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + (y_1 y_2) \mathbf{e}_2^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

(поскольку  $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$  и  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = 0$ ). Аналогично в пространстве для векторов  $\mathbf{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$  мы имеем

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

В пространстве  $\mathbf{R}^n$  у нас пока не определены длины и углы, и потому определить скалярное произведение формулой (59) не представляется возможным. Поэтому по аналогии с координатными формулами, имевшими место на плоскости и в трехмерном пространстве, скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}_1 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $\mathbf{a}_2 = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$  определяется формулой

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = x'_1 x''_1 + x'_2 x''_2 + \dots + x'_n x''_n.$$

Легко проверяется, что алгебраические свойства (60) скалярного произведения при этом сохраняются.

Формула (61) теперь уже не доказывается, исходя из формулы (59) и что  $\cos 0 = 1$ , а служит определением длины вектора, т. е. для любого вектора  $\mathbf{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  мы имеем по определению  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . Наконец, формула (59), в которой теперь определены все величины, кроме  $\alpha$ , служит в  $\mathbf{R}^n$  определением угла между векторами. Иначе говоря, если  $\mathbf{a}_1 = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  и  $\mathbf{a}_2 = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  — два ненулевых вектора в  $\mathbf{R}^n$ , то угол  $\alpha$  между ними определяется формулой<sup>1)</sup>

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}. \quad (62)$$

#### Задачи

**214.** Напишите формулу для расстояния между двумя точками, которые заданы своими барицентрическими координатами относительно базисного симплекса с вершинами  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$ .

**215.** Центроидом симплекса называется точка, являющаяся центром равных масс, помещенных в вершинах этого симплекса. Докажите, что  $n+1$  отрезков, каждый из которых соединяет вершину симплекса с центроидом противоположащей грани, пересекаются в одной точке, которая делит каждый из этих отрезков в отношении  $n:1$ , считая от вершины.

**216.** Точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$  имеют относительно базисного симплекса  $A_0 A_1 \dots A_n$  барицентрические координаты  $\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \dots, \mu_n^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Докажите, что объемы симплексов  $M_0 M_1 \dots M_n$  и  $A_0 A_1 \dots A_n$  связаны соотношением

$$v_{M_0 M_1 \dots M_n} = \begin{vmatrix} \mu_0^{(0)} & \mu_1^{(0)} & \dots & \mu_n^{(0)} \\ \mu_0^{(1)} & \mu_1^{(1)} & \dots & \mu_n^{(1)} \\ . & . & . & . \\ \mu_0^{(n)} & \mu_1^{(n)} & \dots & \mu_n^{(n)} \end{vmatrix} v_{A_0 A_1 \dots A_n}.$$

<sup>1)</sup> При этом доказывается (см. пример 29), что для любых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  модуль числа  $\mathbf{a} \mathbf{b}$  не превосходит  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ , и потому правая часть в (62) по модулю не превосходит 1, т. е. из этой формулы угол  $\alpha$ , подчиненный условию  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , всегда определяется (однозначно).





## БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗНАНИЯ

«Точная наука о цветах относится к труднейшим из тех, кои желанны философу. Я надеюсь на этом примере показать, что значит математика в натуральной философии, и побудить геометров ближе подойти к исследованию природы, а жадных до естественной науки — сначала выучиться геометрии».

*И. Ньютон. Оптика*

В этой главе мы рассмотрим различные вопросы, в которых применяются барицентрические координаты. Они относятся к различным областям знания: проблемам цветового зрения, металлургии, химии, генетики, топологии, интерполяции, статистики, электростатики. Все параграфы независимы друг от друга, и их можно читать в любом порядке в соответствии со вкусами читателя.

### § 16. Применения к химии и металлургии

Химические системы — растворы, сплавы, химические соединения, а также смеси, состоящие из нескольких химических веществ, в некоторых отношениях аналогичны материальным точкам.

Для конкретности будем рассматривать трехкомпонентные смеси или соединения (составленные из трех веществ, элементов или иных компонентов). Пусть, скажем, из трех веществ  $A, B, C$  составлена смесь с общей массой  $m$ , причем на каждую единицу массы этой смеси приходится  $\mu_1$  единиц вещества  $A$ ,  $\mu_2$  единиц вещества  $B$  и  $\mu_3$  единиц вещества  $C$  (так что  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ). Числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  называются *концентрациями* компонентов  $A, B, C$ . Выберем на плоскости произвольный треугольник  $ABC$  (базисный треугольник) и сопоставим рассматриваемой смеси материальную точку  $mK$  следующим образом: в точку  $K$  с б-координатами  $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$  помещается масса  $m$  всей рассматриваемой смеси. Таким способом каждой трехкомпонентной смеси сопоставляется материальная точка в  $\triangle ABC$ , причем смесям с различными составами (т. е. отличающимися концентрациями компонентов) сопоставляются м. т., по-разному расположенные в  $\triangle ABC$ . При этом каждая материальная точка  $mK$ , где  $K \in \triangle ABC$ , характеризует вполне определенную смесь.

Пусть теперь имеются две смеси  $m_1K_1$  и  $m_2K_2$ . Если их перемешать, то возникает новая смесь; масса этой новой смеси, очевидно, равна  $m = m_1 + m_2$ , а концентрациям веществ в получившейся смеси соответствует некоторая новая точка  $K$  в  $\triangle ABC$ . Естественно возникает вопрос, где же будет расположена эта новая точка  $K$ , т. е. какой материальной точкой  $mK$  будет характеризоваться эта новая смесь (называемая объединением смесей  $m_1K_1$  и  $m_2K_2$ )? Оказывается, что имеет место следующее легко проверяемое утверждение:

*Если две смеси характеризуются материальными точками  $m_1K_1$  и  $m_2K_2$ , то объединение этих смесей характеризуется материальной точкой  $mK$ , которая является суммой этих двух м. т., т. е.  $m = m_1 + m_2$  и  $K$  — центр масс рассматриваемых двух м. т.:*

$$mK = m_1K_1 + m_2K_2.$$

Аналогичное утверждение верно и применительно к смеси, возникающей при перемешивании любого числа смесей, составленных из трех заданных компонентов. Иначе говоря, если смесь возникла при смешении  $n$  смесей, составленных из одних и тех же трех компонентов  $A, B, C$  и характеризуемых материальными точками  $m_1K_1, m_2K_2, \dots, m_nK_n$ , то полученная смесь характеризуется материальной точкой

$$mK = m_1K_1 + m_2K_2 + \dots + m_nK_n,$$

где  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

Это предложение позволяет сводить разнообразные задачи, в которых речь идет о смесях, к задачам о нахождении центров масс для систем материальных точек.

В качестве базисного треугольника, используемого для изображения трехкомпонентных смесей в виде материальных точек, часто берут п р а в и л ь н ы й треугольник. В этом случае его принято называть *треугольником Гиббса — Розебома*. Нередко в качестве базисного используют равнобедренный прямоугольный треугольник; его называют *треугольником Розебома*. Понятно, что для этой же цели пригоден треугольник произвольной формы. Такого рода треугольные диаграммы находят важные и разнообразные приложения в физико-химическом анализе.

Аналогичным образом можно для изображения четырехкомпонентных смесей использовать материальные точки в заданном тетраэдре, а для изображения многокомпонентных смесей аналогичную роль выполняют симплексы в многомерных пространствах. Для двухкомпонентных смесей эту роль играет отрезок.

**Пример 53.** Имеются два вида серебряного припоя. Первый содержит 20% Ag, 50% Cu, 30% Zn, а второй — 45% Ag, 30% Cu, 25% Zn. Из 15 кг припоя первого вида и 10 кг припоя второго вида получен сплав. Определим процентный состав этого сплава.

**Решение.** Рассмотрим на плоскости треугольник  $ABC$ . Вершины  $A, B, C$  сопоставим соответственно: чистому серебру (Ag), чистой меди (Cu), чистому цинку (Zn). Тогда первый сплав изобразится в виде точки  $P$  с Б-координатами  $(0,2; 0,5; 0,3)$ , а второй — в виде точки  $Q$   $(0,45; 0,3; 0,25)$ . Задача сводится к нахождению центра масс  $Z$  системы двух м. т.  $15P$  и  $10Q$ . По правилу рычага имеем  $15|ZP| = 10|ZQ|$ , и потому  $|ZP| = \frac{2}{5}|PQ|$ . Найдя теперь точку  $Z$

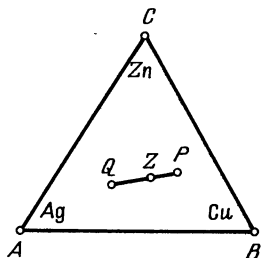


Рис. 75.

на чертеже, легко графически найти состав соответствующего ей сплава (рис. 75). К тому же результату можно прийти, вычислив Б-координаты точки  $Z$  (см. задачу 165):

$$z_1 = \frac{15 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,45}{15 + 10} = 0,3; \quad z_2 = \frac{15 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,3}{25} = 0,42;$$

$$z_3 = \frac{15 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,25}{25} = 0,28.$$

Итак, в сплаве содержится 30% Ag, 42% Cu, 28% Zn.

**Пример 54.** Имеется 600 г раствора иода в спирте, причем концентрация иода составляет 18%. Требуется получить 10%-ный раствор иода в спирте. Определим, сколько следует долить чистого спирта.

**Решение.** Рассмотрим отрезок  $AB$  длины 1 и сопоставим чистому спирту точку  $A$ , чистому иоду — точку  $B$ . Тогда данный раствор изобразится в виде материальной точки  $600P$  (рис. 76), где  $P$  имеет относительно  $[AB]$  барицентрические координаты



Рис. 76.

$\mu_1 = 0,82$ ;  $\mu_2 = 0,18$ , т. е.  $|AP| = 0,18$ . Требуемый раствор изобразится в виде м. т.  $(600 + x)Q$ , где  $x$  — искомое количество спирта в граммах, а  $Q$  — центр масс двух м. т.  $xA$  и  $600P$ . По условию точка  $Q$  должна иметь Б-координаты  $\mu_1 = 0,9$ ;  $\mu_2 = 0,1$ , т. е.  $|AQ| = 0,1$ . По правилу рычага имеем:  $x|AQ| = 600|QP|$ , т. е.  $x \cdot 0,1 = 600 \cdot 0,08$ , откуда  $x = 480$  (г).

### Задачи

**222.** Имеются три раствора спирта в воде: раствор *P* содержит 70 % спирта и 30 % воды; раствор *Q* содержит 50 % спирта и 50 % воды; раствор *R* содержит 20 % спирта и 80 % воды. Сколько кг раствора *R* следует долить к смеси из 5 кг раствора *P* и 2 кг раствора *Q*, чтобы получить раствор, содержащий 40 % спирта?

**223.** Имеются железные руды трех видов: руда вида *P* содержит 53 % железа (Fe) и 13 % кремнезема ( $\text{SiO}_2$ ); руда вида *Q* содержит 59 % Fe и 7 %  $\text{SiO}_2$ ; руда вида *R* содержит 58 % Fe и 11 %  $\text{SiO}_2$ . Из этих руд требуется составить агломерационную шихту, содержащую 55 % Fe и 11 %  $\text{SiO}_2$ . В каких отношениях следует смешать для этой цели руды *P*, *Q*, *R*?

**224.** В химической промышленности применяются так называемые «нитрующие смеси», т. е. смеси серной и азотной кислот и воды. Имеются две смеси: первая содержит 30 %  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , 20 %  $\text{HNO}_3$ , 50 %  $\text{H}_2\text{O}$ , а вторая 74 %  $\text{HNO}_3$ , 26 %  $\text{H}_2\text{O}$ . В каком соотношении следует слить эти смеси, чтобы получить смесь с 20 %-ным содержанием серной кислоты? Каким будет процентный состав такой смеси?

**225.** Олеум, широко используемый в химической промышленности, представляет собой смесь серной кислоты  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , серного ангидрида  $\text{SO}_3$  и пиросерной кислоты  $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$ . Имеются четыре состава олеума: 1) 85 %  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , 5 %  $\text{SO}_3$ , 10 %  $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$ ; 2) 55 %  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ; 5 %  $\text{SO}_3$ , 40 %  $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$ ; 3) 30 %  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , 20 %  $\text{SO}_3$ , 50 %  $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$ ; 4) 60 %  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , 35 %  $\text{SO}_3$ , 5 %  $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$ .

Каким будет процентное содержание олеума, образованного от смешения 24 кг первой смеси, 120 кг второй, 32 кг третьей и 16 кг четвертой?

**226.** На металлургическом заводе имеются железные руды типов *P*, *Q*, *R*. В каждую из них входят три компонента: *A* (Fe); *B* (смесь  $\text{SiO}_2$  и  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) и *C* (смесь  $\text{CaO}$  и  $\text{MgO}$ ). В руду *P* входят 62 % компонента *A*, 14 % компонента *B*, 4 % компонента *C*; в руду *Q* входят 56 % *A*, 5 % *B*, 3 % *C*; в руду *R* входит 52 % *A*, 19 % *B* и 2 % *C*. Смешением этих руд составлена шихта, содержащая 40 % *P*, 35 % *Q*, 25 % *R*. В каких отношениях войдут в эту шихту компоненты *A*, *B*, *C*?

**227.** Из руд трех видов *P*, *Q*, *R*, указанных в задаче 226, желательно составить шихту, содержащую 58 % *A*, 12 % *B* и 3 % *C*. Отклонение допустимо с точностью до 2 % для компонента *A*, до 1 % для компонента *B* и до 0,2 % для компонента *C*. Возможно ли такую шихту составить?

## § 17. Колориметрия

Еще в конце XVII века Ньютон обнаружил, что белый цвет можно рассматривать как смешение семи различных цветов. В середине XVIII века М. В. Ломоносов высказал мысль, что путем смешения лишь трех определенных цветов можно получить все возможные цвета и оттенки. Эта гипотеза была уточнена и развита в XIX веке Юнгом и Гельмгольцем.

Они разработали теорию (основанную на гипотезе, также впервые высказанной Ломоносовым) трехцветного зрительного аппарата человека. Согласно этой теории в человеческом глазу имеются колбочки только трех различных типов: одни воспринимают (днем) только красный цвет, другие — только зеленый, третьи — только синий. Любой другой цвет воспринимается как «смешение» этих трех цветов.

В оптике различают ахроматические («неокрашенные») цвета (черные, серые, белые) и хроматические (зеленые, синие и т. д.). Среди последних выделяют *монохроматические* цвета, т. е. такие, которые представляют собой электромагнитное излучение одной определенной длины волны  $\lambda$ . Человеческий глаз воспринимает цвета, которые соответствуют длинам волн от  $\lambda = 380$  нм (1 нанометр =  $10^{-9}$  м) до  $\lambda = 780$  нм. Монохроматическое излучение воспринимается глазом по-разному в зависимости от длины волны; например, излучение с длиной волны между 380 нм и 430 нм воспринимается как фиолетовый цвет, а между 620 нм и 780 нм — как красный цвет.

Воспринимаемое глазом ощущение цвета может возникать в результате образования «смеси» нескольких монохроматических излучений. Существуют различные способы «смешения» цветов. Например, при одновременном освещении одной и той же площадки (экрана) лучами различных цветов возникает новый цвет; при рассмотрении диска, разделенного на разноцветные секторы и вращающегося с частотой 30 и более оборотов в секунду, также возникает ощущение единой («смешанной») цветовой окраски диска. Например, смешивая таким образом красный и синий цвета, можно получить различные пурпурные цвета и оттенки (малиновый, розовый и т. п.). Оказывается, что при смешении различных цветов иногда можно получить цвет, который воспринимается человеческим глазом так же, как некоторый монохроматический цвет.

Будем говорить, что три цвета *линейно зависимы*, если один из них может быть получен от смешения двух других (при надлежащем подборе интенсивностей, т. е. потоков, характеризующих освещенность экрана). Если же ни при каком смешении двух цветов нельзя получить третий цвет, то эти три цвета называются *линейно независимыми*. Таковы, например, красный, зеленый и синий.

Рассмотрим теперь случай четырех цветов. Может случиться, что путем смешения трех из них (с надлежащими интенсивностями) получится четвертый. Может также оказаться, что при надлежащем смешении двух из этих цветов и при надлежащем смешении двух других цветов получается один и тот же цвет. В любом из этих двух случаев говорят, что рас-

смотренные четыре цвета *линейно зависимы*. Важным для колориметрии является следующий закон, сформулированный в 1861 году немецким математиком Германом Грассманом <sup>1)</sup> (на основании большого экспериментального материала, собранного различными исследователями): *любые четыре цвета линейно зависимы. Существует бесконечно много линейно независимых троек цветов*.

В 1931 году Международная осветительная комиссия (МОК) приняла в качестве основных три монохроматических цвета: красный  $R$ , зеленый  $G$  и синий  $B$  с длинами волн соответственно  $\lambda = 700$  нм,  $\lambda = 546,1$  нм,  $\lambda = 435,8$  нм.

Распространенное выражение вида «при смешении цветов  $R$ ,  $G$ ,  $B$  с такими-то интенсивностями получается цвет, соответствующий длине волны  $\lambda$  (скажем,  $\lambda = 500$  нм)» не следует понимать буквально; оно означает не то, что получено монохроматическое излучение с длиной волны  $\lambda$ , а лишь то, что полученное излучение производит *такое же* воздействие на глаз, как монохроматическое излучение с длиной волны  $\lambda$ .

Теперь будет понятен другой важный закон, сформулированный Грассманом: *цвет смеси нескольких цветов зависит только от цветов смешиваемых компонентов, но не зависит от спектрального состава этих компонентов*.

При смешении цветов  $R$ ,  $G$ ,  $B$  можно, в частности, получить и белый цвет. Приняты различные стандарты «белизны». Если смешать с равными интенсивностями (т. е. освещенностями, — скажем, по 1 люмену) красный цвет  $R$ , зеленый  $G$  и синий  $B$ , то получится не белый цвет, а цвет синего оттенка. В качестве стандартного белого цвета (обозначается буквой  $E$ ) принят цвет, возникающий от смешения цвета  $R$  с освещенностью в 1 люмен с 4,5907 люмена цвета  $G$  и с 0,0601 люмена цвета  $B$  (рис. 77).

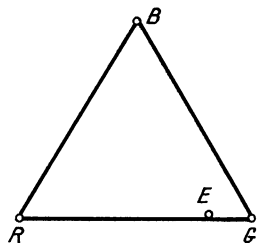


Рис. 77.

Мы можем теперь наглядно изобразить цвета, получаемые от смешения трех основных цветов  $R$ ,  $G$ ,  $B$ . Выберем на плоскости какой-либо треугольник и вершины его обозначим буквами  $R$ ,  $G$ ,  $B$  (в соответствии с основными цветами). Если некоторый цвет возник при смешении  $r$  «единиц» цвета  $R$ ,  $g$  «единиц» цвета  $G$  и  $b$  «единиц» цвета  $B$ ,

<sup>1)</sup> Грассману, который в большей степени был философом, чем математиком, принадлежит — наравне с Гамильтоном — заслуга введения векторных пространств и векторных операций (в частности, скалярного и векторного произведений).

причем  $r + g + b = 1$ , то можно этому цвету сопоставить точку  $F$ , имеющую Б-координаты  $(r; g; b)$ . При этом надо условиться, что считать «единицей» того или иного цвета. В соответствии со сказанным выше за «единицу» принимают такие интенсивности цветов  $R, G$  и  $B$ , которые соответствуют освещенности соответственно в 1 люмен, 4,6 люмена и 0,06 люмена. Цвет, возникающий при смешении  $r, g, b$  выбранных «единиц» цветов  $R, G, B$ , где  $r + g + b = 1$ , изобразится в виде точки  $F$  треугольника  $RGB$ , которая имеет Б-координаты  $(r; g; b)$ . Эти координаты называют в колориметрии *координатами цветности* (или трехцветными координатами). В частности, стандартный белый цвет  $E$  имеет Б-координаты (координаты цветности)  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**З а м е ч а н и е.** Прием, который здесь был применен, используется и в других аналогичных ситуациях и, в частности, в проективной геометрии. Пусть заданная точка  $E$  имеет относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Если  $\mu_3$  значительно меньше чисел  $\mu_1, \mu_2$ , то точка  $E$  расположена вблизи стороны  $A_1A_2$ , и потому угол  $A_1EA_2$  близок к развернутому, а изучение взаимного расположения точки  $E$  и других лежащих вблизи нее точек затруднительно. Существенно легче было бы произвести такое изучение, если бы точка  $E$  находилась в «центральной части» треугольника  $A_1A_2A_3$ . Чтобы осуществить «перевод» точки  $E$  в «центральную часть» треугольника, сопоставим числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  соответственно вершинам  $A_1, A_2, A_3$  базисного треугольника и будем их считать «единичными массами» для этих вершин. Если теперь  $P$  — произвольная точка и  $(b_1; b_2; b_3)$  — ее Б-координаты относительно  $\triangle A_1A_2A_3$ , то

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= b_1\overrightarrow{OA_1} + b_2\overrightarrow{OA_2} + b_3\overrightarrow{OA_3} = \frac{b_1}{\mu_1}(\mu_1\overrightarrow{OA_1}) + \frac{b_2}{\mu_2}(\mu_2\overrightarrow{OA_2}) + \\ &+ \frac{b_3}{\mu_3}(\mu_3\overrightarrow{OA_3}).\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить точку  $P$ , надо «единичные массы»  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  умножить соответственно на числа  $\frac{b_1}{\mu_1}, \frac{b_2}{\mu_2}, \frac{b_3}{\mu_3}$ . Эти числа примем за координаты точки  $P$  относительно базисного  $\triangle A_1A_2A_3$ , в котором задана «единичная точка»  $E$ . Эти координаты обычно рассматриваются с точностью до общего множителя, т. е. берутся их отношения  $\frac{b_1}{\mu_1} : \frac{b_2}{\mu_2} : \frac{b_3}{\mu_3}$ , которые называются однородными (или проек-



тивными) координатами точки  $P$  относительно  $\triangle A_1A_2A_3$  с единичной точкой  $E$ . В частности, сама точка  $E$  имеет однородные координаты  $1:1:1$  (или  $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ ), т. е. переход к этим координатам как бы «переводит» точку  $E$  в «центральную часть» треугольника  $A_1A_2A_3$ .

Вернемся к проблемам колориметрии. В виде точек на плоскости можно изображать и такие цвета, которые не получаются от смешения цветов  $R, G, B$ . Пусть  $F$  — такой цвет, что при смешении цвета  $F$  с одним из цветов  $R, G, B$  (скажем, для определенности, с  $R$ ) можно получить такой же цвет, как от смешения двух других цветов ( $G$  и  $B$ ). Это означает, что найдутся положительные числа  $f_1, r_1, g_1, b_1$ , для которых

$$f_1F + r_1R = g_1G + b_1B.$$

Увеличив интенсивности всех четырех цветов в  $h$  раз, запишем это соотношение в виде

$$fF = rR + gG + bB,$$

где  $f = f_1h, r = (-r_1)h, g = g_1h, b = b_1h$ ; при этом число  $h$  подбираем так, чтобы было  $r + g + b = 1$ .

Цвета  $fF$  и  $F$  отличаются своей интенсивностью (яркостью), но не цветностью. Их цветность можно изобразить в виде точки  $F_1$ , расположенной в плоскости треугольника  $RGB$  и имеющей Б-координаты («цветовые коэффициенты»)  $r, g, b$ . Так как одна из этих координат отрицательна, то точка  $F_1$  расположена вне  $\triangle RGB$ .

Множество всех точек, изображающих цветности спектральных (т. е. монохроматических) цветов ( $430 \text{ нм} \leq \lambda \leq 700 \text{ нм}$ ),

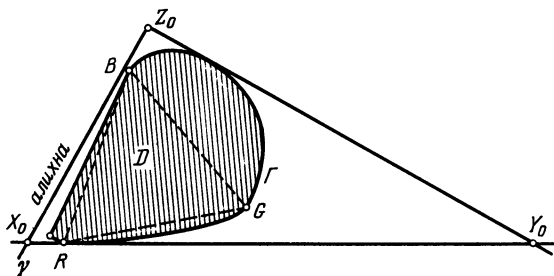


Рис. 78.

представляет собой некоторую кривую  $\Gamma$ , снятую экспериментально (рис. 78). Понятно, что она проходит через вершины базисного («цветного») треугольника  $RGB$ , так как цвета  $R$ ,

$G$ ,  $B$  монохроматические. Кривая  $G$  ограничивает выпуклую область  $D$  (область «реальных цветов»); поэтому любая цветность, возникающая при смешении монохроматических цветов, изобразится в виде точки, принадлежащей этой области. То, что область  $D$  содержит весь базисный треугольник  $RGB$ , означает, что каждая точка этого треугольника изображает некоторый реальный цвет. В то же время имеются такие реальные цвета, которые не могут быть получены из цветов  $R$ ,  $G$ ,  $B$  только с помощью операции их смешивания; таковыми будут цвета, изображаемые точками области  $D$ , лежащими вне  $\triangle RGB$ . Выпуклость и «округлость» области  $D$  указывает еще и на то, что ни при каком выборе базисного треугольника с вершинами в точках, изображающих реальные цвета, не может оказаться, что все реальные цвета имеют лишь положительные  $B$ -координаты, т. е. что любой реальный цвет может быть получен из трех «базисных» цветов (соответствующих вершинам базисного треугольника) с помощью смешения.

Сказанное имеет непосредственное отношение к вопросу о цветопередаче в цветном телевидении, фотографии и кинематографии. В каждом случае цветное изображение реального объекта, «нарисованное» объективом на поверхности светочувствительного слоя, как бы разлагается на компоненты, соответствующие трем базисным цветам. В киноплёнке, например, это достигается тем, что светочувствительный слой состоит из трех отдельных слоев, в которые вводятся специальные красители (сенсibilизаторы), благодаря которым кристаллы бромистого серебра, окрашенные тем или иным сенсibilизатором, оказываются чувствительными в основном лишь к определенной компоненте (красной, зеленой или синей). В результате процесса проявления и фиксирования в желатиновом слое (который ранее был светочувствительным) возникают три изображения снятого объекта — красное, зеленое и синее. Каждое из этих изображений образовано мелкими кристалликами соответствующего цвета — «зернышками», которые хорошо видны при рассмотрении киноплёнки (или фотоснимка) через микроскоп и даже просматриваются через сильную лупу. Однако при непосредственном рассмотрении глазом (без сильно увеличивающих оптических приборов) эти три цветных изображения смешиваются, что и создает эффект цветного снимка.

В телевизоре тот же эффект достигается тем, что на поверхность кинескопа наносится при его изготовлении три системы элементов, которые под воздействием электронного луча (десятки раз в секунду прочерчивающего строка за строкой всю поверхность кинескопа) светятся — одни красным,

другие зеленым, третьи синим светом. Так как эти люминесцирующие элементы нанесены в виде очень мелких сеток, покрывающих поверхность кинескопа узкими перемежающимися строками, то возникающие на поверхности экрана цвета (красный, зеленый, синий) смешиваются, и в зависимости от яркостей этих компонентов зритель воспринимает на экране цветное изображение.

Из сказанного выше ясно, что (даже при идеальных сенсibilизаторах и безукоризненно проведенном процессе проявления, точно воспроизводящем на изображении базисные цвета  $R, G, B$ ) полученное фотографическое, кинематографическое или телевизионное изображение может воспроизвести лишь такие цвета, которые получаются смешением трех базисных цветов (с теми или иными интенсивностями). Иначе говоря, на изображении получаются лишь те цвета, которые соответствуют точкам базисного треугольника  $RGB$  (а не всей области  $D$  реальных цветов). Это означает, что цветопередача, получаемая на изображении, непременно будет несколько искаженной и более бедной, чем цветовая гамма, имевшаяся у реального снимавшегося объекта. Даже с учетом эффекта смешения цветов на изображении воспроизводятся не все реальные цвета, а лишь цвета, изображаемые точками базисного («цветового») треугольника  $RGB$ . Почему же мы не замечаем этого и часто (при точной работе оператора и работников проявочного цеха) видим на киноэкране прекрасную естественную цветопередачу? Объясняется это тем, что ведь и наш глаз тоже работает на основе трехкомпонентного цветового зрения (благодаря наличию колбочек трех видов в сетчатой оболочке глаза), и потому при хорошем подборе сенсibilизаторов изображение на экране соответствует тому восприятию реального объекта, которое осуществляется нашим глазом.

Заметим еще, что дальтонизм (врожденный недостаток зрения, при котором не различаются синий и зеленый цвета) сводится к наличию только двух базисных цветов — красного и еще одного («сине-зеленого»). В результате вместо треугольника  $RGB$  мы получаем для характеристики зрения дальтоника отрезок  $RB$ ; точки этого отрезка, изображающие цвета, различаемые дальтоником, характеризуются уже не тремя, а двумя барицентрическими координатами  $r, b$ .

Вернемся к математическому рассмотрению проблемы цветопередачи. Как мы видели, точки плоскости  $RGB$ , лежащие вне области  $D$ , не соответствуют реальным цветам. Тем не менее ради удобства вычислений бывает целесообразно рассматривать и эти точки. В частности, представляет определен-

ное удобство выбор такого базисного треугольника, относительно которого все реальные цвета имеют неотрицательные координаты. Однако, как следует из сказанного выше, выбрать этот треугольник так, чтобы его вершинами оказались точки, изображающие реальные цвета, невозможно.

В 1931 году МОК приняла стандартную систему цветовых (барицентрических) координат, в которой в качестве основных цветов (изображаемых вершинами базисного треугольника) приняты три цвета, не воспроизводимых реально, и получивших стандартные обозначения  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Выбор точек  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  в плоскости треугольника  $RGB$ , соответствующих этим цветам, диктуется следующими соображениями. Пусть  $F$  по-прежнему обозначает какой-либо «единичный цвет», и пусть  $(r; g; b)$  — его Б-координаты относительно  $\triangle RGB$ , а  $(x; y; z)$  — его Б-координаты относительно треугольника  $X_0Y_0Z_0$  (пока еще нами не выбранного). Тогда интенсивность  $L_F$  единичного цвета  $F$  выражается через интенсивности  $L_R$ ,  $L_G$ ,  $L_B$  единичных цветов  $R$ ,  $G$ ,  $B$  по формуле

$$L_F = rL_R + gL_G + bL_B, \quad (63)$$

а через интенсивности  $L_X$ ,  $L_Y$ ,  $L_Z$  единичных цветов  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — по аналогичной формуле

$$L_F = xL_X + yL_Y + zL_Z.$$

Последняя формула упростится, если два единичных цвета (скажем,  $X$  и  $Z$ ) будут иметь нулевую интенсивность. Пользуясь формулой (63), нетрудно написать уравнение линии  $\gamma$ , точки  $F$  которой соответствуют цветам, которые имеют (относительно  $\triangle RGB$ ) нулевую интенсивность:

$$rL_R + gL_G + bL_B = 0,$$

или подробнее

$$1r + 4,5907g + 0,0601b = 0. \quad (64)$$

Линия  $\gamma$  — прямая (рис. 78); она получила название «алихна» (по-гречески «бесцветная»). Две вершины  $X_0$  и  $Z_0$  (а значит, и сторону  $X_0Z_0$ ) выберем лежащими на прямой  $\gamma$ . Вторую сторону треугольника  $X_0Y_0Z_0$  выбирают на прямой, проходящей через те точки «линии спектральных цветов»  $\Gamma$ , которые изображают монохроматические цвета с длинами волн  $\lambda = 700$  нм и  $\lambda = 640$  нм. Такой выбор диктуется тем, что на этом участке линия  $\Gamma$  практически прямолинейна, и в новой системе отсчета  $X_0Y_0Z_0$  для монохроматических цветов из диапазона от 640 нм до 700 нм одна Б-координата будет равна нулю. Так как известно, что указанные две точки относительно

$\triangle RGB$  имеют Б-координаты  $(1; 0; 0)$  и  $(0,9797; 0,0203; -0,002)$ , а любая прямая выражается уравнением первой степени относительно Б-координат, то легко найти уравнение искомой прямой (рис. 78):

$$0,1g + b = 0. \quad (65)$$

Прямую, содержащую третью сторону треугольника  $X_0Y_0Z_0$ , выбирают так, чтобы она касалась «области реальных цветов»; в качестве нее берут прямую, описываемую уравнением

$$2,45r + 1,55g + b = 0. \quad (66)$$

#### Задачи

**228.** Учитывая, что сумма барицентрических координат равна единице, вычислите Б-координаты (относительно  $\triangle RGB$ ) точек попарного пересечения трех прямых (64), (65), (66).

**229.** Вычислите Б-координаты  $e_x, e_y, e_z$  точки  $E$  («белый цвет») относительно базисного треугольника  $X_0Y_0Z_0$ , образованного прямыми (64), (65), (66).

**230.** Докажите, что для базисных цветов  $X = (3e_x) X_0, Y = (3e_y) Y_0, Z = (3e_z) Z_0$  справедливо соотношение  $E = \frac{1}{3} X + \frac{1}{3} Y + \frac{1}{3} Z$ . Эти базисные цвета играют важную роль в теории цветопередачи.

### § 18. Подразделения полиэдров

В этом параграфе мы расскажем о применении центров масс и барицентрических координат в топологии — новом разделе геометрии, который оформился в самостоятельное научное направление лишь в XX столетии. Впрочем, о самой топологии здесь речи не будет<sup>1)</sup>, а разговор пойдет лишь о *барицентрических подразделениях*, рассматриваемых в различных вопросах топологии.

В отличие от других параграфов, здесь задачи не собраны в конце параграфа, а рассредоточены по всему тексту, так как они составляют существенную часть изложения. Читатель сам решит, будет ли он эти задачи решать подряд (возможно, ограничиваясь трехмерным пространством, т. е. считая  $n = 3$ ), или же часть из них пропустит, ознакомившись с содержащимися в них утверждениями.

Прежде всего отметим следующий факт (см. замечание 1 в § 2). Пусть  $T = [A_0A_1A_2]$  — некоторый треугольник и  $m_0, m_1, m_2$  — положительные числа (массы, помещаемые в вершинах этого треугольника). Обозначим через  $A_{012}$  центр

<sup>1)</sup> Читателю, который захочет получить представление о топологии, можно рекомендовать книгу: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. (Библиотека «Квант», вып. 21.)

масс всех трех м. т.  $m_0A_0$ ,  $m_1A_1$ ,  $m_2A_2$ , а через  $A_{12}$  — центр масс двух м. т.  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  (рис. 79). Тогда точки  $A_0$ ,  $A_{12}$  и  $A_{012}$  лежат на одной прямой. Этот факт можно осмыслить следующим образом. Точка  $A_0$  — нульмерная грань треугольника  $[A_0A_1A_2]$ , а сторона  $[A_1A_2]$  (которая содержит

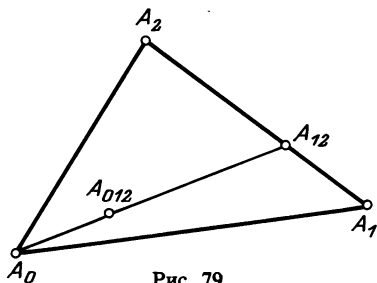


Рис. 79.

все остальные вершины, кроме  $A_0$ ) — одномерная грань этого треугольника, *противоположная* нульмерной грани  $A_0$ . Теперь отмеченный факт может быть сформулирован следующим образом. Пусть в вершинах треугольника  $T$  помещены какие-то положительные массы, и пусть  $T'$  и  $T''$  — две противоположные грани этого треугольника (т. е.  $T''$  содержит все вершины треугольника, кроме вершин, принадлежащих грани  $T'$ ). Обозначим через  $A'$  центр масс, помещенных в вершинах грани  $T'$ , через  $A''$  — центр масс, помещенных в вершинах грани  $T''$ , а через  $A$  — центр всех масс, помещенных в вершинах треугольника  $T$ . Тогда точки  $A'$ ,  $A''$ ,  $A$  лежат на одной прямой.

### Задачи

**231.** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для тетраэдра. Сколько в результате получается отрезков, пересекающихся в одной точке (см. задачу 1)?

**232.** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для  $n$ -мерного симплекса.

**233.** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольных м. т.  $m_1A_1, \dots, m_kA_k$  (не предполагая, что  $A_1, \dots, A_k$  — вершины треугольника, тетраэдра, симплекса).

Следующий факт мы получим, рассматривая тетраэдр (треугольник для этого слишком беден геометрической информацией). Пусть в вершинах тетраэдра  $T = [A_0A_1A_2A_3]$  помещены какие-то положительные массы  $m_0, m_1, m_2, m_3$ , и

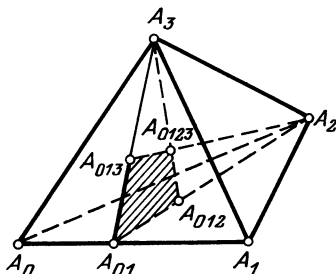


Рис. 80.

пусть  $T'$  — некоторая одномерная грань (ребро) тетраэдра  $T$ , скажем,  $T' = [A_0A_1]$ . К этому ребру примыкают две двумерные

грани  $[A_0A_1A_2]$  и  $[A_0A_1A_3]$  (рис. 80), а также одна «трехмерная грань» — сам тетраэдр  $[A_0A_1A_2A_3]$ . Кроме того, к ребру  $T'$  примыкает одна одномерная грань (само ребро  $T'$ ). Для каждой из этих четырех граней (примыкающих к  $T'$ ) можно взять центр масс, лежащих в этой грани, т. е. точки  $A_{012}$ ,  $A_{013}$ ,  $A_{0123}$ ,  $A_{01}$ . Оказывается, что эти четыре точки лежат в одной плоскости (см. задачу 234).

### Задачи

**234.** Пусть  $T' = [A_0A_1]$  — одномерная грань тетраэдра  $[A_0A_1A_2A_3]$ , в вершинах которого помещены массы  $m_0, m_1, m_2, m_3$ . Докажите, что для каждой из четырех граней, примыкающих к  $T'$ , центр содержащихся в ней масс лежит в плоскости, определяемой (в барицентрических координатах  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  относительно базисного тетраэдра  $[A_0A_1A_2A_3]$ ) уравнением  $\frac{\mu_0}{m_0} = \frac{\mu_1}{m_1}$ .

**235.** Пусть  $T = [A_0A_1 \dots A_n]$  — некоторый  $n$ -мерный симплекс, в вершинах которого помещены положительные массы  $m_0, m_1, \dots, m_n$ . Пусть, далее,  $T'$  — некоторая  $k$ -мерная грань этого симплекса, скажем,  $T' = [A_0A_1 \dots A_k]$  ( $k < n$ ). Докажите, что для любой грани  $T''$ , примыкающей к  $T'$  (т. е. содержащей все вершины  $A_0, A_1, \dots, A_k$ ), центр масс, содержащихся в грани  $T''$ , лежит в  $(n - k)$ -мерной плоскости, определяемой уравнениями

$$\frac{\mu_0}{m_0} = \frac{\mu_1}{m_1} = \dots = \frac{\mu_k}{m_k}.$$

Вернемся снова к треугольнику  $T = [A_0A_1A_2]$ , в вершинах которого расположены массы  $m_0, m_1, m_2$ , и возьмем какую-либо вершину этого треугольника, скажем, вершину  $T' = A_0$ . Рассмотрим все те точки треугольника, у которых отношение  $\frac{\mu_0}{m_0}$  не меньше, чем аналогичные отношения для других

вершин, т. е. выполнены два неравенства  $\frac{\mu_0}{m_0} \geq \frac{\mu_1}{m_1}, \frac{\mu_0}{m_0} \geq \frac{\mu_2}{m_2}$ .

На рис. 81 это множество  $3(A_0)$  отмечено штриховкой; оно называется *барицентрической звездой*<sup>1)</sup> вершины  $A_0$  в треугольнике  $[A_0A_1A_2]$ . На рисунке видно, что барицентрическая звезда является в п у к л ы м множеством (четыреугольником). Видно также, что барицентрическая звезда составлена из двух

<sup>1)</sup> Точнее, замкнутой барицентрической звездой (кроме них, рассматриваются открытые барицентрические звезды, определяемые строгими неравенствами:  $\frac{\mu_0}{m_0} > \frac{\mu_1}{m_1}, \frac{\mu_0}{m_0} > \frac{\mu_2}{m_2}$ ). Мы в дальнейшем будем рассматривать только замкнутые барицентрические звезды, опуская слово «замкнутые».

треугольников  $[A_0A_{01}A_{012}]$  и  $[A_0A_{02}A_{012}]$ , которые называются *звездными треугольниками*.

Теперь возьмем не вершину треугольника  $T = [A_0A_1A_2]$ , а его одномерную грань  $T'$ , скажем,  $T' = [A_0A_1]$ . Барицентри-

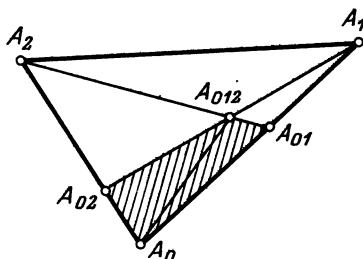


Рис. 81.

ческая звезда  $3(T')$  этой грани определяется системой соотношений

$$\frac{\mu_0}{m_0} = \frac{\mu_1}{m_1} \geq \frac{\mu_2}{m_2}$$

и представляет собой отрезок  $[A_{01}A_{012}]$ .

Наконец, барицентрическая звезда  $3(T)$  самого треугольника  $T = [A_0A_1A_2]$  определяется равенствами

$$\frac{\mu_0}{m_0} = \frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu_2}{m_2}$$

и состоит только из одной точки  $A_{012}$ .

Заметим, что барицентрическая звезда нульмерной грани имеет размерность 2, для одномерной грани барицентрическая звезда имеет размерность 1, для двумерной — размерность 0, т. е. в треугольнике  $[A_0A_1A_2]$  барицентрическая звезда  $k$ -мерной грани ( $k = 0, 1, 2$ ) имеет «дополнительную» размерность  $2 - k$ . Кроме того, по сравнению с гранями барицентрические звезды примыкают друг к другу «наоборот»: если грань  $T'$  треугольника примыкает к грани  $T''$  (т. е.  $T' \supset T''$ ), то, наоборот, звезда  $3(T'')$  примыкает к  $3(T')$  (т. е.  $3(T'') \supset 3(T')$ ). Это легко проследить на рис. 81, например, для граней  $T' = [A_0A_1]$ ,  $T'' = A_0$ .

Для тетраэдра  $T = [A_0A_1A_2A_3]$  положение вещей аналогично (см. задачу 239).

#### Задачи

**236.** Пусть  $T'$  — некоторая  $k$ -мерная грань симплекса  $T = [A_0A_1 \dots A_n]$ , скажем,  $T' = [A_0A_1 \dots A_k]$ . Барицентрической звездой  $3(T')$  грани  $T'$  в этом симплексе называется множество всех точек,



барицентрические координаты  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  которых (относительно базисного симплекса  $[A_0 A_1 \dots A_n]$ ) удовлетворяют условиям

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu_0}{m_0}, \dots, \frac{\mu_k}{m_k} = \frac{\mu_0}{m_0}; \frac{\mu_{k+1}}{m_{k+1}} \leq \frac{\mu_0}{m_0}, \dots, \frac{\mu_n}{m_n} \leq \frac{\mu_0}{m_0}.$$

Докажите, что  $3(T')$  есть выпуклый многогранник размерности  $n - k$ .

**237.** Докажите, что если грань  $T'$  симплекса  $[A_0 A_1 \dots A_n]$  примыкает к грани  $T''$  (т. е.  $T' \supset T''$ ), то звезда  $3(T'')$  примыкает к  $3(T')$  (т. е.  $3(T'') \supset 3(T')$ ).

**238.** Пусть  $T_1$  — какая-либо  $k$ -мерная грань симплекса  $T = [A_0 A_1 \dots A_n]$  (в вершинах которого расположены массы  $m_0, m_1, \dots, m_n$ ) и  $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{n-k} \subset T$  — такая последовательность граней, что каждая следующая грань имеет на единицу большую размерность, чем предыдущая. Центры масс, содержащихся в этих гранях, обозначим через  $B_1, B_2, \dots, B_{n-k}, B$ . Докажите, что  $(n - k)$ -мерный симплекс с вершинами  $B_1, B_2, \dots, B_{n-k}, B$  («звездный симплекс», сопряженный грани  $T_1$ ) содержится в звезде  $3(T_1)$ . Докажите также, что число таких звездных симплексов (сопряженных грани  $T_1$ ) равно  $(n - k)!$ , а объединение всех этих симплексов равно  $3(T_1)$ .

**239.** Проверьте свойства барицентрических звезд и звездных симплексов (задачи 236—238) в случае, когда рассматривается тетраэдр ( $n = 3$ ) с равными массами в его вершинах ( $m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ). Сделайте чертеж.

Заметим, что все звездные симплексы, сопряженные различным граням симплекса  $T$ , и все грани этих звездных симплексов образуют систему симплексов, обладающих следующим свойством расположения друг относительно друга: каждые два из этих симплексов либо не имеют общих точек, либо же их пересечение является гранью каждого из них. Короче, эти симплексы примыкают друг к другу целыми гранями. Это легко прослеживается на рис. 82, где изображено разбиение

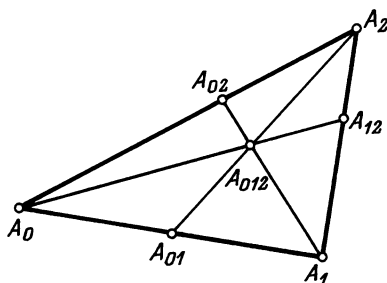


Рис. 82.

треугольника  $T = [A_0 A_1 A_2]$  на звездные симплексы. Например, одномерный симплекс  $[A_0 A_{01}]$  и двумерный симплекс

$[A_2A_{12}A_{012}]$  не имеют общих точек, а симплексы  $[A_0A_{01}A_{012}]$  и  $[A_0A_{02}A_{012}]$  пересекаются по отрезку  $[A_0A_{012}]$ , являющемуся их общей «гранью».

В различных вопросах топологии рассматриваются *симплициальные комплексы*, т. е. такие системы симплексов, что эти симплексы и их грани обладают отмеченным выше свойством: пересечение любых двух либо пусто, либо является гранью каждого из них. Таким образом, разбиение произвольного симплекса на звездные симплексы

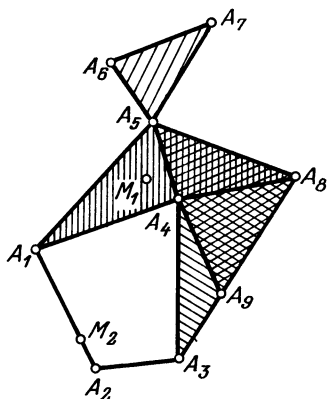


Рис. 83.

представляет собой *симплициальный комплекс*. Пример симплициального комплекса изображен на рис. 83; этот комплекс является *двумерным*, т. е. наибольшая из размерностей входящих в него симплексов равна 2.

Множество всех точек, принадлежащих симплексам, составляющим комплекс, называется *полиэдром*. Но чтобы задать симплициальный комплекс, недостаточно только указать соответствующий полиэдр; надо еще перечислить симплексы, составляющие этот комплекс. Например, симплекс  $A_0A_1 \dots A_n$  со всеми своими гранями составляет симплициальный комплекс. Его барицентрическое подразделение (состоящее из всех звездных симплексов и их граней) — это уже другой симплициальный комплекс (хотя он определяет тот же полиэдр).

Пусть  $K$  — некоторый симплициальный комплекс,  $|K|$  — соответствующий полиэдр. Если  $M$  — какая-либо точка этого полиэдра, то в комплексе  $K$  существует единственный симплекс, для которого  $M$  является внутренней точкой (он называется *носителем* точки  $M$ ). Например, для точки  $M_1$  на рис. 83 носителем является треугольник  $A_1A_4A_5$ , а для точки  $M_2$  — отрезок  $A_1A_2$ .

Пусть  $K$  — некоторый симплициальный комплекс,  $A_1, A_2, \dots, A_p$  — все его вершины. Возьмем произвольную точку  $M \in |K|$ , и пусть ее носителем является, скажем, симплекс  $[A_1A_2 \dots A_k]$ . Тогда определены барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  этой точки относительно базисного симплекса  $[A_1A_2 \dots A_k]$ , причем все эти координаты положительны (поскольку  $M$  — внутренняя точка симплекса  $[A_1A_2 \dots A_k]$ , являющегося ее носителем). Условимся считать, что для всех остальных вершин комплекса  $K$  (не принадлежащих симплексу

$[A_1 A_2 \dots A_k]$ ) соответствующие им барицентрические координаты точки  $M$  тоже определены, но все равны нулю. Таким образом, справедливо равенство

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_k \overrightarrow{OA_k} + \mu_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + \mu_p \overrightarrow{OA_p},$$

причем сумма всех барицентрических координат точки  $M$  по-прежнему равна 1.

Теперь можно обобщить понятие барицентрической звезды на любой симплицальный комплекс. Пусть  $K$  — симплицальный комплекс,  $A_1, A_2, \dots, A_p$  — все его вершины и  $m_1, m_2, \dots, m_p$  — заданные положительные числа (распределение масс). Возьмем некоторый симплекс  $T$  комплекса  $K$ ; пусть, скажем, его вершинами являются точки  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Барицентрической звездой симплекса  $T$  в комплексе  $K$  называется множество всех точек  $M \in |K|$ , барицентрические координаты которых удовлетворяют условиям

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu_2}{m_2} = \dots = \frac{\mu_k}{m_k}, \quad \frac{\mu_{k+1}}{m_{k+1}} \leq \frac{\mu_1}{m_1}, \dots, \frac{\mu_p}{m_p} \leq \frac{\mu_1}{m_1}$$

(см. задачу 236). Например, барицентрическая звезда вершины  $A_6$  в комплексе, изображенном на рис. 84, представляет собой

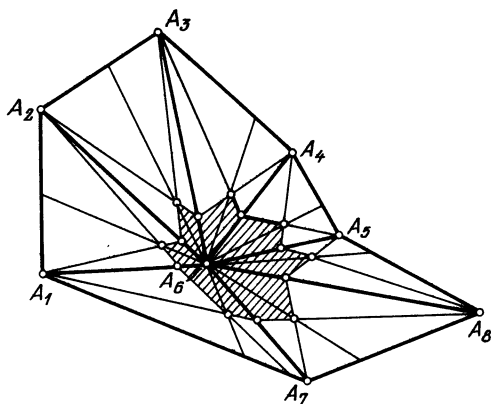


Рис. 84.

многоугольник, но только не плоский, а изломанный (если точки  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, A_8$  не лежат в одной плоскости). Барицентрическая звезда отрезка  $A_4 A_6$  на рис. 84 представляет собой двузвенную ломаную.

#### Задачи

**240.** Пусть  $T$  — некоторый симплекс комплекса  $K$  и  $T_1, \dots, T_r$  — все симплексы комплекса  $K$ , примыкающие к  $T$  (т. е. содержащие  $T$ ). Докажите, что барицентрическая звезда  $z(T)$  симплекса

$T$  в комплексе  $K$  представляет собой объединение барицентрических звезд грани  $T$ , взятых в симплексах  $T_1, \dots, T_r$ .

**241.** Докажите, что объединение всех барицентрических звезд вершин комплекса  $K$  есть  $|K|$ .

**242.** Комплекс  $K$  состоит из  $q$  треугольников, имеющих общую сторону  $T$  (и из всех граней этих треугольников). Что представляет собой барицентрическая звезда симплекса  $T$  в этом комплексе? (Этот пример вместе с рис. 84, на котором заштрихована барицентрическая звезда вершины  $A_6$ , поясняет происхождение термина «барицентрическая звезда».)

**243.** Докажите, что если барицентрические звезды вершин  $A_1, A_2, \dots, A_k$  в комплексе  $K$  имеют непустое пересечение, то в комплексе  $K$  имеется симплекс с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_k$  (и обратно).

В заключение рассмотрим вопрос о размерах симплексов некоторого комплекса. *Диаметром* симплекса называется наибольшая из длин его ребер. Далее, *степенью мелкости* симплициального комплекса  $K$  называется наибольший из диаметров входящих в него симплексов.

#### Задачи

**244.** Докажите, что если диаметр симплекса равен  $d$ , то для любых двух точек  $A, B$  этого симплекса справедливо неравенство  $|AB| \leq d$ , причем равенство достигается лишь в том случае, если  $A$  и  $B$  — концы наибольшего ребра (или одного из наибольших).

**245.** Докажите, что если комплекс  $K$  представляет собой барицентрическое подразделение симплекса  $T = [A_0 A_1 \dots A_n]$ , построенное при помощи распределения масс  $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$  (такое барицентрическое подразделение называется *собственным*), то степень мелкости  $d'$  симплициального комплекса  $K$  удовлетворяет условиям  $\frac{1}{2}d < d' < \frac{n}{n+1}d$ , где  $d$  — диаметр симплекса  $T$ . Докажите более

точную оценку  $d' \leq \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}d$  (которая достигается только для правильного симплекса  $T$ ).

**246.** Пусть  $K$  — симплициальный комплекс, на вершинах  $A_1, A_2, \dots, A_p$  которого задано некоторое распределение масс  $m_1, m_2, \dots, m_p$ . Докажите, что все звездные симплексы, построенные (с помощью этого распределения масс) во всех симплексах комплекса  $K$ , образуют новый симплициальный комплекс  $K'$  (он называется *барицентрическим подразделением* комплекса  $K$  (рис. 84)).

**247.** Докажите, что если степень мелкости комплекса  $K$  равна  $d$ , то его собственное барицентрическое подразделение (построенное с помощью распределения масс  $m_1 = m_2 = \dots = m_p = 1$ ) имеет степень мелкости  $\leq \frac{r}{r+1}d$ , где  $r$  — наибольшая размерность содержащихся в комплексе  $K$  симплексов. Выведите отсюда, что  $s$ -кратное

собственное барицентрическое подразделение  $K^{(s)}$  комплекса  $K$  имеет при достаточно большом  $s$  как угодно малую степень мелкости.

**248.** Пусть  $|K|$  — произвольный полиэдр, имеющий размерность  $r$  (т. е. наибольшая из размерностей симплексов, содержащихся в комплексе  $K$ , равна  $r$ ) и  $\varepsilon$  — заданное положительное число. Докажите, что существуют полиэдры  $Z_1, Z_2, \dots, Z_q$ , покрывающие  $|K|$  (т. е.  $Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_q = |K|$ ) и обладающие следующими двумя свойствами:  
1) каждые  $r+2$  из полиэдров  $Z_1, Z_2, \dots, Z_q$  имеют пустое пересечение;  
2) любой полиэдр  $Z_i$  имеет диаметр  $\leq \varepsilon$  (т. е. для любых точек  $A, B \in Z_i$  справедливо неравенство  $|AB| \leq \varepsilon$ ). (Сформулированное утверждение имеет фундаментальное значение для топологической теории размерности.).

## § 19. Барицентрические координаты в теории интерполяции

В этом параграфе мы рассмотрим задачу *интерполяции*, т. е. приближенного представления сложных функций с помощью более простых. В этих вопросах (находящихся приложения в математическом анализе при приближенном решении уравнений математической физики и т. д.) за последние годы все более широко применяются барицентрические координаты.

### Задачи

**249.** Плоскость  $\alpha'$  ортогонально проектируется на плоскость  $\alpha$  (рис. 85). Точки  $A'_1, A'_2, A'_3, M'$  плоскости  $\alpha'$  имеют своими проекциями точки  $A_1, A_2, A_3, M$ . Докажите, что барицентрические координаты точки  $M'$  относительно базисного треугольника  $A'_1A'_2A'_3$  совпадают с барицентрическими координатами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  точки  $M$  относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ .

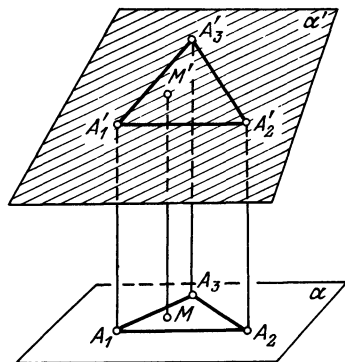


Рис. 85.

**250.** Докажите, что при условиях задачи 249 справедливо равенство

$$\overrightarrow{MM'} = \mu_1 \overrightarrow{A_1A'_1} + \mu_2 \overrightarrow{A_2A'_2} + \mu_3 \overrightarrow{A_3A'_3}.$$

**251.** Условимся расстояние точки  $M'$  от плоскости  $\alpha$  считать положительным, если  $M$  находится по одну сторону плоскости  $\alpha$  («сверху»), и отрицательным, если  $M'$  лежит по другую сторону от  $\alpha$  («снизу»).

Пусть при условиях задачи 249 расстояния точек  $A'_1, A'_2, A'_3$  от плоскости  $\alpha$  равны  $a_1, a_2, a_3$ . Докажите, что если точка  $X$  пространства проектируется в точку  $M(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$  и находится на рас-

стоянии  $z$  от плоскости  $\alpha$ , то точка  $X$  в том и только в том случае лежит в плоскости  $\alpha'$ , если

$$z = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3.$$

Это соотношение можно назвать *барицентрическим уравнением* плоскости  $\alpha'$  относительно базисного треугольника  $A_1 A_2 A_3$ .

**252.** Обобщите результат задачи 250 на случай  $k$ -мерного симплекса  $[A_0 A_1 \dots A_k]$ .

Утверждение, содержащееся в задаче 251, позволяет рассмотреть одну типичную интерполяционную ситуацию. Пусть в плоскости  $\alpha$  задана некоторая область  $G$  (которую ради простоты будем считать многоугольником) и в этой области задана положительная функция  $\varphi$ , т. е. каждой точке  $M \in G$  сопоставлено некоторое положительное число  $\varphi(M)$ . Рассмотрим в пространстве точку  $M'$ , проектирующуюся в точку  $M$  и находящуюся на расстоянии  $\varphi(M)$  от плоскости  $\alpha$ . Всевозможные такие точки  $M'$  образуют некоторую поверхность  $G'$ , проектирующуюся на область  $G$ , а объединение всевозможных отрезков  $[MM']$  представляет собой тело  $T$ , ограниченное областью  $G$ , поверхностью  $G'$  и боковой (цилиндрической) поверхностью с образующими, перпендикулярными плоскости  $\alpha$  (рис. 86). Во многих прикладных вопросах нужно (хотя

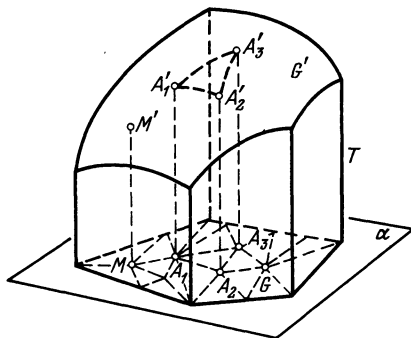


Рис. 86.

бы приближенно) вычислить площадь поверхности  $G'$  или объем тела  $T$ . Ввиду сложности функции  $\varphi$  решение этих задач может оказаться нелегким. Мы можем существенно упростить их решение, воспользовавшись следующим приемом. Разобьем область  $G$  на мелкие треугольники. Если  $A_1 A_2 A_3$  — один из этих треугольников и  $A'_1, A'_2, A'_3$  — точки поверхности  $G'$ , лежащие над точками  $A_1, A_2, A_3$  (т. е. проектирующиеся в эти точки), то мы заменим участок поверхности  $G'$ , лежащий над  $\triangle A_1 A_2 A_3$ , треугольником

(«треугольной черепицей»)  $A'_1 A'_2 A'_3$ . Поступив таким образом и с другими участками поверхности  $G'$  (расположенными над другими треугольниками, на которые разбита область  $G$ ), мы заменим всю поверхность  $G'$  «черепичной крышей», составленной из треугольников и расположенной над областью  $G$ . Вычислить объем тела  $T^*$ , ограниченного этой крышей, областью  $G$  и боковой поверхностью, может оказаться более легкой задачей, чем вычисление объема первоначального тела  $T$ . Интуитивно ясно (это можно строго обосновать при весьма общих предположениях относительно функции  $\varphi$ ), что при мелком дроблении области  $G$  на треугольники объем тела  $T^*$  мало отличается от объема тела  $T$ . И другие задачи, связанные с поверхностью  $G'$  или телом  $T$ , может оказаться более удобным решать, заменяя поверхность  $G'$  указанной выше «крышей». А возможность записать с помощью барицентрических координат уравнение плоскости, содержащей «треугольную черепицу» (задача 251), облегчает решение задач, связанных с «крышей».

#### Задачи

**253.** Докажите, что объем прямой косоусеченной призмы, изображенной на рис. 85, равен  $\frac{1}{3}S(h_1 + h_2 + h_3)$ , где  $S$  — площадь основания  $A_1 A_2 A_3$ , а  $h_1, h_2, h_3$  — длины ребер  $A_1 A'_1, A_2 A'_2, A_3 A'_3$ .

**254.** Докажите, что если все треугольники, на которые разбита область  $G$ , имеют одинаковую площадь, то объем тела  $T^*$  равен

$$\frac{1}{3n} S(k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_p h_p),$$

где  $S$  — площадь всей области  $G$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_p$  — значения функции  $\varphi$  в точках  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , являющихся вершинами треугольников, на которые разбита область  $G$ ,  $n$  — число этих треугольников, а  $k_i$  — число треугольников, примыкающих к вершине  $A_i$ .

Иногда бывает нужно заменить поверхность  $G'$  «крышей», составленной не из плоских треугольников, а из искривленных частей, «более плотно» прилегающих к поверхности  $G'$ . В следующих задачах намечается, каким образом с помощью барицентрических координат может быть осуществлена *квадратичная интерполяция* функции  $\varphi$ , т. е. замена поверхности  $G'$  прилегающей к ней поверхностью, составленной из «искривленных черепиц», описываемых уравнениями второй степени.

**255.** Многочлен второй степени принимает в точках  $A_0, A_1$  числовой оси значения  $a_0, a_1$ , а в середине отрезка  $A_0 A_1$  — значение  $a_{01}$  (рис. 87). Докажите, что в точке  $M$ , имеющей отно-

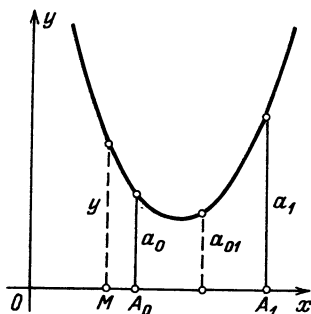


Рис. 87.

сительно отрезка  $A_0A_1$  барицентрические координаты  $\mu_0, \mu_1$ , этот многочлен принимает значение

$$y = a_0\mu_0^2 + a_1\mu_1^2 + (4a_{01} - a_0 - a_1)\mu_0\mu_1.$$

**256.** Пусть  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$  — середины сторон треугольника  $[A_1A_2A_3]$ , лежащего в области  $G$ ; пусть, далее,  $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  — значения функции  $\varphi$  в точках  $A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}$ , а  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_{12}, A'_{13}, A'_{23}$  — соответствующие точки поверхности  $G'$ . Докажите, что поверхность, определяемая относительно базисного треугольника  $[A_1A_2A_3]$  барицентрическим уравнением

$$z = a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + a_3\mu_3^2 + (4a_{12} - a_1 - a_2)\mu_1\mu_2 + \\ + (4a_{13} - a_1 - a_3)\mu_1\mu_3 - (4a_{23} - a_2 - a_3)\mu_2\mu_3$$

(где  $z$  — высота точки над плоскостью  $\triangle A_1A_2A_3$ , а  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — барицентрические координаты ее проекции относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$ ), проходит через все шесть точек  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_{12}, A'_{13}, A'_{23}$ .

**257.** Докажите единственность поверхности, рассмотренной в задаче 256. Иначе говоря, если поверхность

$$z = A\mu_1^2 + B\mu_2^2 + C\mu_3^2 + D\mu_1\mu_2 + E\mu_1\mu_3 + F\mu_2\mu_3$$

проходит через все шесть точек  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_{12}, A'_{13}, A'_{23}$ , то она совпадает с поверхностью, рассмотренной в задаче 256.

**258.** Обобщите результаты задач 256, 257 на случай  $k$ -мерного симплекса  $[A_0A_1 \dots A_k]$ .

**259.** Пусть  $G'$  — поверхность, заданная над многоугольником  $G$ , и пусть этот многоугольник разбит на треугольники, каждые два из которых имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют общих точек. Построим над каждым из этих треугольников «искривленную черепицу», описанную в задаче 256. Докажите, что, взяв такие «черепицы» для всех треугольников, на которые разбит многоугольник  $G$ , мы получим над  $G$  «непротекающую крышу», т. е. каждые две соседние «черепицы» плотно без просветов примыкают друг к другу.



## § 20. Интерпретация закона Харди — Вайнберга

Здесь мы рассмотрим вопрос о применении барицентрических координат в популяционной генетике.

В каждой популяции (состоящей из многих особей одного вида) от родителей к детям передаются *наследственные признаки*. Наследственность определяется генами, причем каждый отдельный ген управляет одним элементарным признаком (цвет волос, цвет глаз, резус-фактор крови и т. д.). Ген может иметь либо сильную (доминантную) форму  $A$ , либо слабую (рецессивную) форму  $a$ . При этом каждая особь имеет (во всех клетках своего организма, кроме гамет — половых клеток) одинаковый набор из двух генов, управляющих рассматриваемым признаком. Если в клетках имеется набор  $AA$ , то особь обладает рассматриваемым признаком в сильной форме (скажем, положительный резус). То же будет (фенотипически, т. е. внешне), если в клетках имеется набор  $Aa$ , поскольку ген  $A$  доминирует над более слабым геном  $a$ . И лишь если в клетках содержится набор  $aa$ , то особь обладает рассматриваемым признаком в слабой форме (отрицательный резус).

Пусть в популяции имеется  $X$  особей с генотипом  $AA$ ,  $Y$  особей с генотипом  $Aa$  и  $Z$  особей с генотипом  $aa$ . Тогда вероятности  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  того, что случайно взятая особь имеет соответственно генотип  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$ , пропорциональны числам  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , т. е.  $\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 = X : Y : Z$ , и потому

$$\mu_0 = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad \mu_1 = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad \mu_2 = \frac{Z}{X + Y + Z}.$$

Так как  $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1$ , то в условном треугольнике с вершинами  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$  можно рассмотреть точку  $M$  с барицентрическими координатами  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ; эта точка (рис. 88) и характеризует состояние популяции в отношении распре-

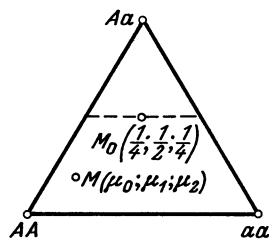


Рис. 88.

деления генов, управляющих рассматриваемым элементарным признаком. Например, «дикой» популяции, в которой все особи имеют генотип  $AA$  (скажем, все кареглазые), соответствует точка  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  (левая нижняя вершина на рис. 88); другой дикой популяции, в которой все особи имеют генотип  $aa$  (все голубоглазые), соответствует правая нижняя вершина  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 1$ .

Смешанной популяции, в которой все три генотипа  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$  встречаются одинаково часто ( $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$ ), соответствует точка пересечения медиан треугольника. А менделеевской популяции (о которой пойдет речь ниже), где четверть особей имеет генотип  $AA$ , четверть  $aa$ , а остальные  $Aa$ , соответствует точка  $M_0$  с координатами  $\mu_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{4}$ .

Исследуем теперь вопрос о том, как видоизменяется точка, характеризующая состояние популяции, при переходе к следующему поколению. Мы будем считать, что в популяции действует панмиксия, т. е. случайное скрещивание, при котором мужская и женская особи (родители) соединяются независимо от их наследственных или иных признаков. Кроме того, будем считать, что среди мужских и женских особей генотип  $AA$  встречается одинаково часто (и то же относится к генотипам  $Aa$ ,  $aa$ ). Пусть родительская популяция характеризуется точкой  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$ . Если отец имеет генотип  $AA$  (вероятность этого равна  $\mu_0$ ), то он непременно передает каждому из детей один ген  $A$ . Далее, если отец имеет генотип  $Aa$  (вероятность этого равна  $\mu_1$ ), то каждый из детей получает от отца ген  $A$  с вероятностью  $1/2$ . Наконец, если отец имеет генотип  $aa$  (вероятность этого равна  $\mu_2$ ), т. е. у него нет генов  $A$ , то дети получают от него ген  $A$  с вероятностью 0. Таким образом, вероятность получить ген  $A$  от случайно выбранного отца равна  $u = \mu_0 \cdot 1 + \mu_1 \cdot \frac{1}{2} + \mu_2 \cdot 0 = \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_1$ . То же справедливо и для случайно выбранной материнской особи. Следовательно, произвольно взятая особь следующего («дочернего») поколения получает генотип  $AA$  (т. е. получает ген  $A$  от каждого из родителей) с вероятностью  $\mu'_0 = u^2$ , где  $u = \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_1$ .

Аналогичное рассуждение показывает, что генотип  $aa$  встречается в дочернем поколении с вероятностью  $\mu'_2 = v^2$ , где  $v = \frac{1}{2} \mu_1 + \mu_2$ .

А так как, очевидно,  $u + v = 1$ , то генотип  $Aa$  встречается в дочернем поколении с вероятностью

$$\mu'_1 = 1 - u^2 - v^2 = (u + v)^2 - u^2 - v^2 = 2uv.$$

Итак, если родительское поколение характеризуется точкой с барицентрическими координатами  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ , то дочернее

поколение характеризуется точкой  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2$ , вычисляемой по формулам

$$\mu'_0 = u^2, \quad \mu'_1 = 2uv, \quad \mu'_2 = v^2, \quad (67)$$

где

$$u = \mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1, \quad v = 1 - u = \frac{1}{2}\mu_1 + \mu_2.$$

Например, если родительское поколение характеризовалось точкой пересечения медиан базисного треугольника ( $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1/3$ ), то для дочернего поколения получаем по этим формулам

$$\mu'_0 = 1/4, \quad \mu'_1 = 1/2, \quad \mu'_2 = 1/4, \quad (68)$$

т. е. дочернее поколение является менделеевским и отличается (по распределению генотипов) от родительского.

В теоретических и практических вопросах биологии, селекции, медицины (и, в частности, в генетико-статистическом анализе реальных популяций) важную роль играют *равновесные состояния* популяций, т. е. такие, при которых дочернее поколение имеет *то же* распределение генотипов, что и родительское поколение. Следующая теорема (закон Харди — Вайнберга) содержит необходимое и достаточное условие для того, чтобы состояние популяции было равновесным.

**Теорема 18.** *Состояние  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$  в том и только в том случае является равновесным, если существуют такие неотрицательные числа  $p, q$ , удовлетворяющие условию  $p + q = 1$ , что выполнены соотношения*

$$\mu_0 = p^2, \quad \mu_1 = 2pq, \quad \mu_2 = q^2. \quad (69)$$

**Доказательство.** Необходимость этого условия непосредственно вытекает из формул (67). В самом деле, если состояние  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$  — равновесное, т. е. дочернее поколение имеет то же распределение генотипов, что и родительское:  $\mu'_0 = \mu_0, \mu'_1 = \mu_1, \mu'_2 = \mu_2$ , то из этих равенств и (67) непосредственно вытекают соотношения (69), где  $p = u, q = v$ .

Достаточность также вытекает из формул (67): если выполнены равенства (69), то на основании формул (67) имеем

$$\mu'_0 = u^2 = \left(\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1\right)^2 = \left(p^2 + \frac{1}{2} \cdot 2pq\right)^2 = p^2(p + q)^2 = p^2 = \mu_0$$

и аналогично  $\mu'_1 = \mu_1, \mu'_2 = \mu_2$ , т. е. популяция равновесна.

Дадим теперь барицентрическую интерпретацию закона Харди — Вайнберга. Для простоты вычислений будем считать, что базисный треугольник является равнобедренным и прямо-

угольным, причем вершина  $Aa$  находится в начале координат, а вершины  $AA$ ,  $aa$  — соответственно в точках  $(-1; -1)$ ,  $(1; -1)$ . Тогда векторы, направленные по боковым сторонам, имеют вид  $\mathbf{a}_0(-1; -1)$ ,  $\mathbf{a}_2(1; -1)$ , и потому для точки  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$  мы имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \mu_0 \mathbf{a}_0 + \mu_2 \mathbf{a}_2 = \mu_0(-1; -1) + \mu_2(1; -1) = \\ &= (-\mu_0 + \mu_2; -\mu_0 - \mu_2),\end{aligned}$$

т. е. точка  $M$  имеет декартовы координаты  $x = \mu_2 - \mu_0$ ,  $y = -\mu_0 - \mu_2$ . Теперь для равновесного состояния находим в силу формул (69) и соотношения  $p + q = 1$ :

$$\begin{aligned}x^2 &= (\mu_2 - \mu_0)^2 = (q^2 - p^2)^2 = (q - p)^2 (q + p)^2 = (q - p)^2 = \\ &= 2p^2 + 2q^2 - (p + q)^2 = 2\mu_0 + 2\mu_2 - 1 = -2y - 1,\end{aligned}$$

т. е. все равновесные состояния находятся на дуге параболы, имеющей уравнение  $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$  (рис. 89). Эта парабола проходит через вершины  $AA$  и  $aa$  треугольника, соответствующие диким популяциям, а вершина параболы находится

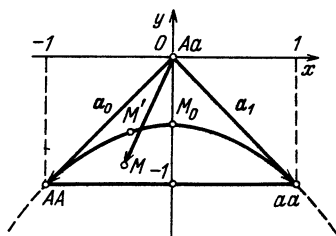


Рис. 89.

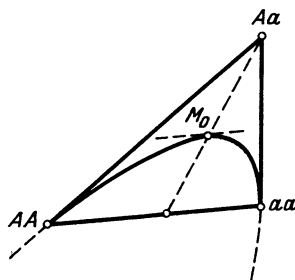


Рис. 90.

в точке  $M_0$ , имеющей координаты  $x = 0$ ,  $y = -1/2$ , т. е. в точке, соответствующей менделеевской популяции (68). Если в качестве базисного взять другой треугольник, картина аффинно искажается (рис. 90).

**Пример 55.** Известно, что примерно 16% людей имеют отрицательный резус (рецессивный наследственный признак). Считая, что человеческая популяция подчиняется законам панмиксии и равновесна в отношении этого наследственного признака, определить соответствующее распределение генотипов.

**Решение.** Отрицательный резус соответствует генотипу  $aa$ . По условию частота этого генотипа составляет  $\mu_2 = 0,16$ .

Согласно закону Харди – Вайнберга (см. (69)) имеем  $q^2 = 0,16$ , т. е.  $q = 0,4$ , и потому  $p = 1 - q = 0,6$ . Таким образом,  $\mu_0 = p^2 = 0,6^2 = 0,36$ ;  $\mu_1 = 2pq = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$ . Итак, из тех 84 % людей, которые имеют положительный резус, 36 % имеют генотип  $AA$  и 48 % имеют смешанный («гетерозиготный») генотип  $Aa$  в отношении рассматриваемого наследственного признака (точка  $M'$  на рис. 89). Этот расчет имеет существенное практическое значение. Если мать имеет отрицательный резус, а ребенок – положительный, то во время родов (особенно если эти роды – не первые) ребенку угрожает *гемолитическая болезнь*, представляющая опасность для его жизни и здоровья и требующая принятия заблаговременных медицинских мер. Таким образом, если у женщины с отрицательным резусом муж гетерозиготен ( $Aa$ ), то с вероятностью  $1/2$  ребенок будет заведомо здоров (и будет иметь отрицательный резус) и с вероятностью  $1/2$  подвержен опасности заболевания. Если же муж имеет положительный резус и гомозиготен ( $AA$ ), то каждый ребенок (кроме, возможно, первого) подвержен опасности заболевания. И если женщина с отрицательным резусом не знает генотипа своего будущего мужа, то для каждого ее ребенка (кроме первого) вероятность заболевания равна

$$0,36 \cdot 1 + 0,48 \cdot \frac{1}{2} + 0,16 \cdot 0 = 0,6.$$

**Пример 56.** В Бразилии встречается редкое наследственное заболевание, называемой *ахейроподией*. Оно контролируется одним геном и состоит в том, что человек, получающий от родителей два рецессивных гена ( $aa$ ), рождается без кистей рук и окончаний ног. Частота этого заболевания составляет примерно 0,01 %. Некоторый бразилец, происходящий из аристократической семьи с далеко прослеженной родословной по мужской и женской линии, не имеет среди своих предков ни одного ахейроподика. Из двух его дочерей первая имеет больного ребенка. Какова вероятность, что вторая дочь, выйдя замуж за внешне здорового человека, будет иметь больного ребенка?

**Решение.** Отсутствие заболеваний в родословной бразильца-аристократа позволяет заключить, что в его семье не было болезнетворного гена  $a$ , так что он имеет (как и все его предки) генотип  $AA$ . Внук его (от первой дочери) болен, т. е. имеет генотип  $aa$ . Значит, он получил ген  $a$  от каждого из своих родителей и, в частности, от матери, т. е. первой дочери аристократа. Из этого вытекает, что эта дочь имеет ген  $a$  и, поскольку она сама здорова, обладает генотипом  $Aa$  (рис. 91). Так как дочь получила от своего отца-аристократа непременно

но ген  $A$ , то болезнетворный ген  $a$  она получила от матери. Значит, ее мать (жена аристократа), поскольку она здорова, имеет генотип  $Aa$ .

Вторая дочь получила от отца ген  $A$ , а от матери могла (с вероятностью  $1/2$ ) получить ген  $a$ . Значит, вероятность того, что ее ребенок получит ген  $a$  от нее, равна  $1/4$ . Муж второй дочери (внешне здоровый) может передать ребенку ген  $a$  только в том случае, если сам он имеет генотип  $Aa$ . Поскольку он внешне здоров, вероятность такого генотипа равна  $\frac{\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} = \frac{2pq}{p^2 + 2pq} = \frac{2q}{p + 2q}$ , а вероятность передачи

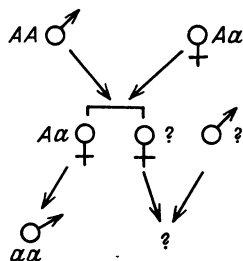


Рис. 91.

гена  $a$  ребенку вдвое меньше, т. е. она равна  $\frac{q}{p + 2q}$ . Таким образом, вероятность появления больного ребенка равна  $\frac{q}{p + 2q} \cdot \frac{1}{4}$ . По условию  $\mu_2 = q^2 = 0,0001$ , т. е.  $q = 0,01$ ;  $p = 0,99$  (мы считаем, что популяция бразильцев равновесна по рассматриваемому признаку, т. е. имеет место закон Харди – Вайнберга). Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{q}{p + 2q} \cdot \frac{1}{4} = \frac{0,01}{1,01} \cdot 0,25 = 0,002475...$$

Мы видим, что вероятность появления больного ребенка (равная по всей популяции  $0,0001$ ) возрастает почти в 25 раз при наличии больного ребенка у сестры. Подобного рода *генетическая консультация* (т. е. определение вероятности появления больного ребенка) весьма существенна при наличии в семьях наследственных заболеваний.

Рассмотренные вопросы относятся к качественным наследственным признакам (которые могут у каждой особи проявляться либо в доминантной, либо в рецессивной форме). Существуют и *количественные* признаки (контролируемые обычно не одним, а многими генами): рост, масса тела, другие показатели физического развития взрослой особи. При рассмотрении количественных признаков барицентрические соображения также могут быть полезны. Рассмотрим один пример.

**Пример 57.** При обследовании 120 выловленных особей атлантической сельди средняя масса особи оказалась равной 371,2 г, а ее средняя длина 24,6 см. Обследование 80 особей,

взятых из второго отлова (из той же популяции) дало среднюю массу особи 381,8 г и ее длину 24,9 см. Обследование 100 особей из третьего отлова дало среднюю массу особи 373,7 г и ее длину 24,2 см. Как определить среднюю массу и длину по всем 300 обследованным особям?

Решение. Рассмотрим вопрос в общем виде. Сначала были обследованы  $m$  особей; пусть их индивидуальные показатели (масса и длина) были соответственно равны

$$x_1^{(1)}, y_1^{(1)}; x_2^{(1)}, y_2^{(1)}; \dots; x_m^{(1)}, y_m^{(1)}.$$

Далее, следующие  $n$  обследованных особей дали показатели

$$x_1^{(2)}, y_1^{(2)}; x_2^{(2)}, y_2^{(2)}; \dots; x_n^{(2)}, y_n^{(2)}.$$

Наконец,  $p$  особей третьей выборки имели показатели

$$x_1^{(3)}, y_1^{(3)}; x_2^{(3)}, y_2^{(3)}; \dots; x_p^{(3)}, y_p^{(3)}.$$

Тогда средние показатели по первой, второй и третьей выборкам имеют следующие значения:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + \dots + x_m^{(1)}}{m}, \quad \bar{y}^{(1)} = \frac{y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + \dots + y_m^{(1)}}{m};$$

$$\bar{x}^{(2)} = \frac{x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + \dots + x_n^{(2)}}{n}, \quad \bar{y}^{(2)} = \frac{y_1^{(2)} + y_2^{(2)} + \dots + y_n^{(2)}}{n};$$

$$\bar{x}^{(3)} = \frac{x_1^{(3)} + x_2^{(3)} + \dots + x_p^{(3)}}{p}, \quad \bar{y}^{(3)} = \frac{y_1^{(3)} + y_2^{(3)} + \dots + y_p^{(3)}}{p},$$

а общее среднее (по первому показателю — массе) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(x_1^{(1)} + \dots + x_m^{(1)}) + (x_1^{(2)} + \dots + x_n^{(2)}) + (x_1^{(3)} + \dots + x_p^{(3)})}{m + n + p} = \\ &= \frac{m\bar{x}^{(1)} + n\bar{x}^{(2)} + p\bar{x}^{(3)}}{m + n + p} = \mu_1\bar{x}^{(1)} + \mu_2\bar{x}^{(2)} + \mu_3\bar{x}^{(3)}, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\mu_1 = \frac{m}{m + n + p}, \quad \mu_2 = \frac{n}{m + n + p}, \quad \mu_3 = \frac{p}{m + n + p}$$

(так что  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ). Аналогично, для второго показателя общее среднее равно

$$\bar{y} = \mu_1\bar{y}^{(1)} + \mu_2\bar{y}^{(2)} + \mu_3\bar{y}^{(3)}. \quad (71)$$

Если сравнить эти формулы с соотношениями (15), то мы приходим к следующему выводу. Обозначим через  $A_1, A_2, A_3$  точки с координатами  $(\bar{x}^{(1)}, \bar{y}^{(1)}), (\bar{x}^{(2)}, \bar{y}^{(2)}), (\bar{x}^{(3)}, \bar{y}^{(3)})$ , а через  $M$  точку, координатами которой являются общие средние  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Тогда формулы (70), (71) означают, что  $M$  есть точка,

имеющая относительно базисного треугольника  $A_1A_2A_3$  барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Это дает возможность графически находить средние значения  $\bar{x}, \bar{y}$ .

### Задачи

**260.** Селекцией, направленной против рецессивов, называется способ скрещивания, при котором особям с генотипом  $aa$  не дают возможности иметь потомство, т. е. в образовании дочернего поколения участвуют лишь особи с генотипами  $AA, Aa$  (при случайном скрещивании). Докажите, что если родительское поколение характеризуется точкой  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$ , то дочернее поколение (при такой селекции) характеризуется точкой  $M'(\mu'_0; \mu'_1; \mu'_2)$ , где

$$\mu'_0 : \mu'_1 : \mu'_2 = \left( \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_1 \right)^2 : \mu_1 \left( \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_1 \right) : \left( \frac{1}{2} \mu_1 \right)^2.$$

Выведите отсюда, что точка  $M'$  лежит на параболе Харди — Вайнберга (рис. 89).

**261.** Докажите, что если последовательность поколений получается друг из друга с помощью селекции, направленной против рецессивов (задача 260), то точки, характеризующие эти поколения, перемещаются по параболе Харди — Вайнберга и приближаются к вершине  $AA$ . Таким образом, в пределе (а практически — после достаточно большого числа скрещиваний с такой селекцией) получится чистая популяция из одних только особей  $AA$ .

**262.** В стаде имеется несколько производителей (мужских особей) с генотипом  $AA$  и женские особи с распределением генотипов, характеризуемым точкой  $M(\mu_0; \mu_1; \mu_2)$ . Из каждого вновь появляющегося поколения мужские особи удаляются (мясопоставки), а в скрещивании участвуют лишь производители («вытесняющее скрещивание»). Докажите, что последовательность получающихся поколений характеризуется точками, лежащими на стороне базисного треугольника и приближающимися к вершине ( $AA$ ), причем процент гетерозигот  $Aa$  среди женских особей уменьшается в геометрической прогрессии.

**263.** Обследуется  $k$  выборок из некоторой популяции, в которых взято соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_k$  особей. Средние значения двух показателей (масса, длина) по этим выборкам равны соответственно

$$(\bar{x}_1; \bar{y}_1), (\bar{x}_2; \bar{y}_2), \dots, (\bar{x}_k; \bar{y}_k),$$

а средние значения этих показателей по всем  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  обследованным особям равны  $\bar{x}, \bar{y}$ . Докажите, что точка  $M(\bar{x}, \bar{y})$  является центром масс м. т.  $n_1A_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1), n_2A_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2), \dots, n_kA_k(\bar{x}_k; \bar{y}_k)$ .



*Марк Беневич Балк  
Владимир Григорьевич Болтянский*

## ГЕОМЕТРИЯ МАСС

---

Серия «Библиотечка «Квант», выпуск 61

Редактор *И. М. Бокова*  
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*  
Технический редактор *Е. В. Морозова*  
Корректоры *О. А. Сигал, И. Я. Кристаль*

ИБ № 32492

Сдано в набор 16.10.86. Подписано к печати 28.04.87 Т-12218. Формат 84 × 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 8,82. Уч.-изд. л. 9,29. Тираж 145 000 экз. Заказ № 584. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука».  
Главная редакция физико-математической литературы.  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Диaposитивы изготовлены в Ордена Октябрьской революции, Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136 Ленинград П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано с диaposитивов в типографии им. Котлякова издательства «Финансы и статистика» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 195273, Ленинград, Руставели, 13.

**30 коп.**

---